Enseñanza de la Matemática

LUZ ELVIRA CERDEYRA
GEMA INÉS FIORITI

A·Z editora

Enseñanza de la Matemática

LUZ ELVIRA CERDEYRA

GEMA INÉS FIORITI

Destinado a:

- estudiantes de profesorado de nivel primario
- profesores de matemática del profesorado de nivel primario
- maestros
- profesores de matemática del ciclo básico secundario

A·Z editora

Libro de edición argentina. Impreso en la Argentina.

Paraguay 1346, (1057) Buenos Aires, Argentina
Teléfonos: 41-0845 y 44-6832

I.S.B.N. 950-534-092-3

ÍNDICE

Pág

3 RELACIONES

FICHA

4 FUNCIONES

FICHA

5 LEYES DE COMPOSICIÓN

FICHA

9 MEDIDA Y MEDICIÓN

La idea directriz de las autoras al escribir el presente volumen está sintetizada en las siguientes frases de su introducción: "Intentamos organizar la actividad en el aula en base a la participación del alumno, incentivado por el docente. Empleamos la técnica del estudio dirigido, con actividades organizadas por el maestro, para que el estudiante aprenda accionando, llegue a la verdad por su propio esfuerzo y viva la alegría indescriptible del descubrimiento".

Compartimos plenamente esta tendencia. La enseñanza de la matemática debe ser siempre activa, con los alumnos en tensión, prestos para captar interrogantes y disparar respuestas, lo mismo que para graficar situaciones o extrapolar conocimientos. Este es el buen camino para el aprendizaje. Una enseñanza pasiva, con alumnos tan sólo receptores, aunque entiendan paso a paso los razonamientos, suministrados en perfectas y ordenadas dosis, podrá aumentar el caudal de conocimientos, pero no desarrollará su potencial matemático. El aprendizaje de la matemática se hace a través de una continua gimnasia intelectual, la cual, por otra parte, interesa y gusta al alumno.

En cuanto a la enseñanza de los maestros, si ella debe tener el mismo estilo que se espera apliquen posteriormente en el aula, también debe ser activa, basada en continuas preguntas, en el planteo sucesivo de situaciones problemáticas y en la adquisición de conceptos tras el convencimiento de su obligada necesidad o conveniencia. En este sentido ha sido redactado el texto de las profesoras Luz Cerdeyra y Gema Fioriti. Ello supone mucha experiencia, mucha capacidad y mucho esfuerzo. Cada capítulo es, esencialmente, una sucesión de preguntas para motivar el estudio, despertar el interés, desarrollar la habilidad matemática y adquirir conocimiento. Se supone que los alumnos ya han seguido la escuela media y tienen, por tanto, los conocimientos básicos de ésta. Se trata ahora de reverlos desde un punto de vista más elevado, sistematizándolos y estructurándolos. Se trata, también, de exponerlos pensando en como han de ser vistos, en sus bases, por los alumnos de la escuela primaria, adelantándose a sus dudas y allanando sus progresos. Es aquí donde se nota la experiencia de las autoras: todo profesor experimentado adivina las dudas de los alumnos antes de que éstos las presenten. Todo ha sido muy pensado.

Es posible que falten algunos temas, pero lo importante es el método y la idea. Rellenar con más ejemplos o más contenidos es cosa fácil que seguramente hará, y debería hacer, todo profesor que siga el texto en sus cursos. Es con la colaboración de todos, alumnos y profesores de los Institutos de Formación Docente, así como de los maestros en ejercicio, que la enseñanza de la matemática en los primeros grados alcanzará y mantendrá los niveles de eficacia y actualidad que sus alumnos de hoy, dirigentes de la sociedad en el año 2000, necesitan y merecen.

DR. LUIS A. SANTALÓ

Introducción

Escribir un texto de matemáticas destinado a alumnos de Institutos de Formación Docente implica un compromiso múltiple: con los niños a los que el futuro maestro tendrá como alumnos, con los alumnos-maestros que buscan una formación adecuada para el ejercicio de su futura profesión, con la pedagogía-didáctica que se pretende demostrar y con los contenidos matemáticos que instrumentarán el contacto lector-autor. Todo ello resume una filosofía educativa, subyacente en cada ejercicio que se proponga, en toda la secuencia temática que se elija.

La experiencia de siete años con niños de escuela primaria, en diaria tarea, nos ha ratificado el principio pedagógico de Dewey, las bases de María Montessori, las demostraciones científicas de la psicología genética de Piaget (pero con las consideraciones psico-pedagógicas que de ellas extrae Brunner), todo ello admirablemente expuesto por Dienes en "La contrucción de la matemática" y en "Las seis etapas en el aprendizaje de la matemática".

Propiciamos la enseñanza de la matemática sobre la base del aprendizaje de la misma. Creemos que la escuela está organizada para que el niño aprenda y no para que el maestro enseñe. Intentamos organizar la actividad en el aula en base a la participación del alumno, incentivado por el docente. Empleamos la técnica del estudio dirigido con actividades organizadas por el maestro para que el estudiante aprenda accionando, llegue a la verdad por su propio esfuerzo y viva la alegría indescriptible del descubrimiento.

Tanto el niño como el adolescente, el joven y el adulto gustan de la búsqueda de soluciones, cuando se les permite moverse a su propio ritmo y según sus intuiciones (aun cuando éstas lo lleven, a veces, a conclusiones erróneas). Descartar una hipótesis, verificando su inexactitud, suele acercar a la formulación de bases correctas, y ayuda, indudablemente, en la búsqueda de métodos adecuados para un eficaz aprendizaje.

El aprendiz que llega a descubrir que el 24% es una expresión que le indica la relación que existe entre 24 y 100, que esa relación es equivalente a 6 / 25, que el 24% de 1.000 es un número que puede obtenerse dividiendo por 25 y multiplicando por 6, que las fracciones son (entre otras cosas) combinaciones de multiplicaciones y divisiones (que a veces pueden expresarse, como en este caso, mediante un número decimal 0,24), aprehende realmente una serie de instrumentos de cálculo que le serán muy útiles, pero, muy especialmente, va desarrollando sus capacidades intelectuales por su propio esfuerzo y "gozando del más apasionante de los juegos: la investigación matemática".

Sí, estamos convencidas que el aprendiz de cualquier edad tiene derecho a gozar del hallazgo de las regularidades lógicas de la matemática. El lograrlo, tal vez, dé lugar a un cambio de actitud (muy a menudo de rechazo y negación) con respecto a la matemática.

Cuando a un niño de cuatro o cinco años le regalamos un juguete lo goza como instrumento de entretenimiento en un determinado lapso. Va perdiendo el interés a medida que el juguete se transforma en elemento conocido y no le brinda nuevas posibilidades de realizar actividades diferentes. A menudo nos reclama a los adultos nuevas posibilidades del juguete ¿qué puedo hacer con estas barajas? Si le enseñamos a hacer carpas, se pierde el interés cuando el dominio psicomotriz le permite armar carpas sin dificultad. Si le agregamos la posibilidad de buscar figuras parecidas, la actividad interesada se prolonga ¿hasta cuándo? Hasta que, una vez dominado ese juego lo propongamos otro.

Si la primera vez que el niño pequeño está en contacto con las barajas, le enseñamos las reglas del "pinche", tal vez llegue a aprender el juego, tal vez se desaliente por no conocer previamente las posibilidades de comparación (semejanzas y diferencias) que hay entre las barajas. Si le vamos suministrando reglas organizadas de acuerdo con su edad y a su experiencia previa, podemos usar las barajas como recurso didáctico amplio y provechoso.

Mientras "investiga" el niño es feliz. ¿Tenemos derecho los docentes de primaria a decir que a los niños no les gustan los problemas, que no les gusta investigar? Es muy probable que, en gran medida, nosotros seamos culpables de su cambio negativo de actitud de los cuatro años a los doce años.

En este primer tomo tratamos de presentarle al alumno-maestro los temas que detalla el programa del Ministerio de Educación de la Nación para la formación matemática en los Institutos de Formación Docente.

Se ha dejado de lado lo relativo a Estadística y Probabilidades, porque son temas de enorme riqueza por su vinculación con importantes ramas de la matemática. Un tratamiento de ellos, con responsabilidad de docentes, exige una extensión que, entendemos, obliga a su publicación en forma separada.

No hemos escrito un libro de matemática, sino una guía de trabajo para llegar a conocer los contenidos curriculares. La fundamentación matemática de los mismos puede encontrarse en la exposición de los profesores del curso y en los libros que citamos a menudo como referencia.

En el tomo II (Guía de trabajos prácticos para Didáctica de la matemática en la escuela primaria) fundamentaremos nuestra filosofía educativa y trataremos de plasmarla en el estudio de algunas formas posibles de enseñar la matemática elemental.

La realización de este trabajo ha sido posible gracias a la colaboración inestimable del profesor Alfredo Raúl Palacios, la licenciada Juana Hervatín y las profesoras del Grupo de Psicomatemática de la Universidad Nacional del Comahue, Dilma Gladis Fregona y María Mercedes Cortés de Carmona.

Nuestro reconocimiento profundo, también, para todos los integrantes del Grupo de Psicomatemática por su apoyo constante a esta obra, y a los alumnos de la división "C" de la escuela N° 53 de Cipolletti (Río Negro), que desde primer grado en 1973 a séptimo grado en 1979 nos permitieron vivir de cerca el proceso de aprendizaje de la matemática en el ciclo primario.

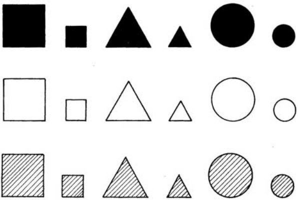
GEMA INÉS FIORITI Y LUZ ELVIRA CERDEYRA

1

Lógica

Ficha 1. Proposiciones.

Material a usar: piezas de cartón como las siguientes:



Llamamos I a este conjunto.

1.- Tomar una pieza cualquiera, designarla **a**. ¿Qué se puede decir de ella? Escribir esos enunciados completos, por ejemplo:

"a es negra"

Tomar otra pieza: ¿Es negra? ¿Es cuadrada? ¿Es rayada? ¿Es grande? ¿Es blanca? ¿Es de la misma forma que **a**?

Estas preguntas que se formulan, y los enunciados sobre la pieza **a** son de distintas características. Esos enunciados son expresiones **con sentido** que afirman o niegan algo; de cada una de ellas se puede decir que son verdaderas o falsas. Estas expresiones son ***proposiciones.***

2.- Completar según corresponda:

a) La pieza **a** es ....
b) La pieza **a** es .... y ....
c) La pieza **a** no es ....

El primero de estos enunciados es una **proposición simple** (o atómica) porque no contiene ninguna otra proposición como parte constituyente.

Los enunciados b y c son **proposiciones compuestas** (o moleculares), contienen otras proposiciones. Así el enunciado b se puede analizar:

$\underbrace{\text{la pieza a es ....}}_{\text{proposición atómica}}$ y $\underbrace{\text{la pieza a es ....}}_{\text{proposición atómica}}$

¿Cuál es el análisis correspondiente a c)? Efectivamente, se trata de una proposición molecular, pues contiene a la proposición atómica "**a** es ....".

3.- Indicar cuáles de las siguientes expresiones son proposiciones y completar:

	¿es proposición?	¿atómica?	¿molecular?
O es cuadrado	sí	sí	——
Δ es negro y Δ es cuadrado	sí	——	sí
¡Qué sol!	no	——	——
x + 2 = 5			
El perro			
Llueve en Jujuy el 10/8/79 a las 3 hs.			
Si se pierde algo, te castigaré			
Podemos preguntarnos: ¿qué es la moral?	sí	sí	——
Sócrates y Demócrito eran contemporáneos			
¿Es tarde?			
Ni estudio ni trabajo			
7 = 4 + 2			
Carlos + 3 = 7	no	——	——

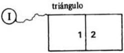
Ficha 2 Valor de verdad. Negación.

1.- Ubicar en este rectángulo todos los elementos de I:

a) Dada la propiedad "es triángulo", analizar para todas las piezas cuáles son las que permiten obtener una proposición verdadera. Por ejemplo:

" ◍ es triángulo" es falso.
" △ es triángulo" es verdadero.

Si se consideran todos los elementos de I, obtendremos dos clases bien diferenciadas: la de las piezas que son triángulos y la clase de las que no lo son. Si se grafica esta situación, se tiene:



b) Si a la proposición "**a** es triángulo" se la simboliza con "**p**", a la proposición "no es cierto que **a** es triángulo" se la simboliza "~ **p**" (el símbolo "~" se lee "no").

Si la pieza **a** pertenece a la región 1, el ***valor de verdad*** de la proposición "**p**" ("**a** es triángulo") es **verdadero**.

"**a** no es triángulo" o "no es cierto que **a** es triángulo" es una proposición molecular formada a partir de la ***negación*** de "**p**".

¿Cuál es el valor de verdad de "~ **p**"? Es claro que el valor de verdad de "~ **p**" depende del de "**p**", pues si "**p**" es verdadera (es cierto que **a** es triángulo), "~ **p**" es falsa. Y si "**p**" es falsa (esto es, si **a** no es triángulo), "~ **p**" es verdadera.

Esto se puede resumir en la siguiente tabla:

p	~p
V	F
F	V

Analizar la siguiente expresión: "no ocurre que a es no triángulo"? ¿Cómo se simboliza? Construir la tabla de verdad.

c) Dada sobre el conjunto I la propiedad "es blanco", proceder como se indica en el inciso a. ¿Cuántas clases se obtienen? ¿Cuáles son? Estas dos clases se pueden representar así:

blanco	1	I
	2	

¿Qué nueva distribución se hace sobre los elementos de I? ¿Qué propiedad tienen los elementos de la región 2?

d) Si se toma una pieza **b** de la región 1, y a la proposición "**b** es blanco" se la simboliza con "**q**", entonces "**q**" es verdadera.
Enunciar "$\sim$**q**", ¿cuál es su valor de verdad?

e) Si se superponen los diagramas de a y c se obtiene:

	triángulo	
blanco	1	2
	4	3

i) ¿Dónde se encuentran las piezas que son a la vez blancas y triangulares?
ii) ¿Qué elementos se encuentran en la región 2? La misma pregunta para las regiones 3 y 4.

El diagrama usado en esta ficha se llama "diagrama de Carroll" (ver detalles sobre el tema representaciones gráficas en el Capítulo II, ficha 4, apartado 6).

f) Dadas las propiedades: "es grande" y "es redondo":

- dibujar el diagrama,
- distribuir las piezas según corresponda.

Observación: es necesario distinguir aquí la diferencia que existe entre una proposición y una propiedad. Por ejemplo: "es blanco" es una propiedad y de ella no tiene sentido decir que es verdadera o falsa, pues el valor de verdad de una proposición formada con esa propiedad depende del sujeto u objeto al cual se aplique.
Así la propiedad "es blanco", atribuida a:

△ , ▧ , el cansancio

da en algunos casos proposiciones:

" △ es blanco", " ▧ es blanco".

y en otros expresiones sin sentido que no son proposiciones:

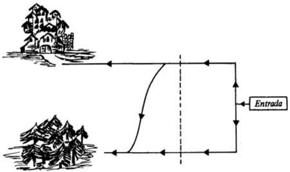
"el cansancio es blanco".

El conjunto de elementos que hacen posible expresar proposiciones a partir de la propiedad P, se llama "conjunto asociado a la propiedad P".

Ficha 3 Redes lógicas. Conjunción.

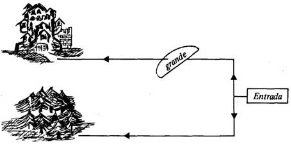
En esta ficha introducimos un recurso didáctico que nos parece adecuado para concretizar algunas nociones lógicas. Se trata de las redes lógicas.

Una red lógica es una serie de placas, con caminos indicados en cada una de ellas, y en la cual se presentan una "entrada" y una "salida", ésta con dos posibilidades: o el camino lleva al castillo (salida a la que se quiere arribar) o al bosque (salida para los elementos con los que no se desea trabajar). El sentido de circulación es único (de derecha a izquierda) y está reiteradamente recalcado por las flechas de la red.



En los caminos insertos en las placas de la red, se ubican "puertas", una en cada placa, que pueden ser traspuestas en función de los atributos o **propiedades de los elementos** que se hagan circular por la red.

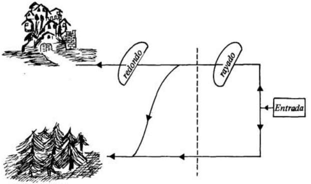
Por ejemplo: si ubicamos en la entrada todos los elementos de I, y la red presenta una puerta con la inscripción "grande":



¿Qué camino puede recorrer ? ¿Va al castillo o al bosque?
¿Qué camino puede recorrer ? ¿Va al castillo o al bosque?
Hacer recorrer la red a todos los elementos de I. ¿Cuáles llegan al castillo? ¿Cuáles al bosque?

Las redes pueden prolongarse empleando series de placas. En cada placa deben figurar los caminos posibles (indicados por las flechas) y las puertas a trasponer en las cuales debe indicarse, por supuesto, la condición exigida para pasar por ellas.

1.- He aquí una red para los elementos de I. **Todas** las piezas entran y llegan o bien al castillo, o bien al bosque. El sentido de circulación es único (para una ficha) y obligatorio:



¿Por cuántos caminos pueden llegar las piezas al castillo? ¿Por qué puertas deben pasar para llegar a él?

Las piezas que van al castillo son **a la vez** .... y ....

2.- La proposición:

" es rayado y es redondo"

indica que las dos propiedades son poseídas **conjuntamente** por una pieza dada.

La operación lógica que efectuamos para llegar a este estado de simultaneidad se llama ***conjunción***.

Si a la proposición " es rayado" la llamamos "p", y a la proposición " es redondo" la llamamos "q", la conjunción:

" es rayado y es redondo"

o, reformulada:

" es rayada y redonda"

se simboliza "p $\wedge$ q" y se lee "p y q".

¿Varía la conjunción si la expresamos como"q $\wedge$ p"?

Observación: no siempre el "y" del lenguaje usual se comporta del modo análogo al símbolo lógico "$\wedge$". En "Elementos de lógica simbólica" (ver bibliografía) Telma B. de Nudler y Oscar Nudler presentan dos interesantes ejemplos:

i) Pronunció su discurso más brillante y murió.
ii) Comió pescado y se intoxicó.

Aquí "y" no tiene el sentido de una mera conjunción, sino que expresa, en i) cierta secuencia temporal, y en ii) una conexión causal.

Ante cada proposición molecular formada con la partícula "y" se debe entonces analizar si se está o no autorizado para considerarlo una conjunción.

¿En cuáles de las siguientes proposiciones "y" corresponde a una conjunción?:

- Tengo hambre y frío.
- La pila se desmoronó y cayó al río.
- Se agachó y empezó a caminar despacio.
- Subía y bajaba de tono.
- El clima es suave y húmedo.

3.- Retomando la salidad de la red (apartado 1) se divide al castillo en locales de modo que cada pieza que llegue a él debe ubicarse en el local que le esté reservado. Así se observa que la **única sala ocupada** es:

donde cada pieza es a la vez rayada y también redonda.

Si en la expresión "x es rayada y redonda" sustituimos "x" por cualquier elemento de la región 1, obtenemos siempre una proposición verdadera. Eso ocurre porque se empleó una red conjuntiva y se ubicaron las puertas para lograr en la salida la conjunción "x es rayada y redonda" en la sala o región 1.

Puede trabajarse un diagrama de Carroll para representar la misma situación:

	redondo	
rayado	1	4
	2	3

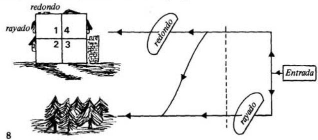
También en este caso la región 1 estará ocupada por las piezas de I que hacen verdadera la expresión "x es rayada y redonda". ¿Sucede lo mismo con cualquier representante de las otras regiones y la misma expresión?

En la siguiente tabla se registran los datos de las proposiciones que corresponden a un representante de cada región:

	x es rayada	*x es redonda*	*x es rayada y redonda*
	V	V	V
	F	V	F
	V	F	F
	F	F	F

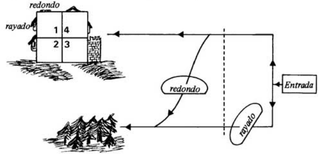
Del análisis de esta tabla se concluye que para que una conjunción sea verdadera, deben serlo cada una de sus proposiciones componentes.

4.- a) Si se ubican las puertas como en la red que sigue:



¿Qué propiedad tienen los elementos que van al castillo? ¿Qué sala ocupan? Evidentemente se trata de los círculos no rayados que van a la sala 2.

b) Cambiando la ubicación de las puertas se pueden ocupar también las salas 4 y 3. ¿A cuál de ellas corresponde la siguiente red?



c) Construir la red para ocupar la sala que falta.

d) Enunciar una proposición sobre un representante de cada sala.

e) La siguiente tabla de verdad corresponde a la red del inciso a. Completar los lugares vacíos.

	x es redondo	*x es no rayado*	*x es redondo y no rayado*
	V	F	
		V	
		V	F
	F	F	

f) Construir las tablas de verdad correspondientes a las regiones 4 y 3.

g) i) Se supone ahora que se tiene:

$$p \wedge q \quad \text{(verdadero)}$$

¿Qué se puede decir de "p" por un lado y de "q" por otro? ¿Puede ser "p" falso? ¿"q" falso? ¿Qué se puede deducir de una conjunción verdadera?

Por ejemplo: si "p" es "○ es blanco" y "q" es "○ es redondo", "p ∧ q" aquí significa "○ es blanco y ○ es redondo", lo que usualmente expresamos diciendo "blanco redondo".

Si dado un cierto conjunto, ocurre que "p ∧ q" resulta siempre verdadero, entonces ocurre que todos los elementos de ese conjunto son blancos y redondos.

¿Es verdad que todos los elementos de ese conjunto son blancos? ¿Y que todos son redondos?

ii) Si se sabe que:

p ∧ q (falso)

¿se puede deducir el valor de verdad particular de cada proposición atómica?

Por ejemplo, si se sabe que una pieza no es "redonda blanca", ¿se puede decir que es blanca?, ¿que es redonda?, ¿o que no es ni blanca ni redonda?

Si "p ∧ q" es falsa, y "p" es verdadera, ¿qué se puede decir de "q"?. Dar un ejemplo. Lo mismo para el caso en que "p ∧ q" es falso y considerando "p" falso.

Observación: como dice Telma Barreiro de Nudler en su "Lógica dinámica" (ver bibliografía):

"Una proposición, como ya se dijo, es o bien verdadera o bien falsa. Estos valores –V y F– reciben el nombre de valores de verdad (o valores veritativos)".

Cuando el valor de verdad de una proposición molecular depende **únicamente** del valor de verdad de sus proposiciones componentes, se considera que dicha proposición es una función de verdad y la(s) conectiva(s) que contiene se denomina (n) **extensional(es)**. El valor de verdad de la proposición molecular "no llueve", depende de únicamente del valor veritativo de "llueve" (si ésta es falsa aquélla es verdadera, si ésta es verdadera aquélla es falsa); por lo tanto la conectiva "no", es de carácter extensional.

En cambio, en el enunciado: "Juan murió porque comió pescado", aunque se conozca el valor de verdad de las dos proposiciones atómicas componentes no se conoce, por ese solo hecho, el valor veritativo de la proposición molecular, por consiguiente la conectiva "porque" no es extensional.

El valor de verdad de las proposiciones moleculares cuyas conectivas son extensionales depende, como ya se dijo, **únicamente** del valor de verdad de las proposiciones componentes, de modo que, conociendo este último, es posible determinar aquél. Esto permite construir, para cada conectiva extensional, una tabla que indica, dadas las distintas combinaciones posibles de valores de verdad de sus componentes, cuál será el valor de verdad de la proposición molecular. Una tabla de este tipo se denomina ***tabla de verdad.***

En las fichas 2 y 3 hemos construido las tablas de verdad correspondientes a las conectivas vistas hasta ahora: "y", "no".

4.- *Ejercicios:*

a) Dados: p: Juan estudia.
q: Juan trabaja.

i) Enunciar las proposiciones correspondientes en cada caso:

- $\sim p$: es falso que Juan estudia.
  Juan no estudia.
- $\sim q$:
- $p \wedge q$:
- $\sim p \wedge q$:
- $p \wedge \sim q$:
- $\sim p \wedge \sim q$:

ii) Sabiendo que el valor de verdad de "p" es verdadero y el de "q" es falso, hallar el valor de verdad de las proposiciones moleculares anteriores. Por ejemplo: en "$\sim p \wedge q$" (la negación corresponde sólo a "p") se obtiene entonces:

p	$\sim p$	q	$\sim p \wedge q$
V	F	F	F

b) Sabiendo que el valor de verdad de "$p \wedge q$" es verdadero, y que "$\sim q$" es falso, determinar el valor de verdad de "p".

Ficha 4 Disyunción: incluyente; excluyente.

1.- Tomar estas cuatro piezas del material:

a) ¿Se puede decir para ese conjunto que todas las piezas son:

rayadas o blancas?
¿pequeñas o grandes?
¿cuadradas o triangulares?

b) ¿Se puede encontrar una pieza que sea a la vez:

rayada y blanca?
¿pequeña y grande?
¿cuadrada y triangular?

c) ¿Se puede decir que para ese conjunto las piezas son:

grandes o rayadas?
¿cuadradas o rayadas?

d) ¿Se puede encontrar una pieza qué sea a la vez:

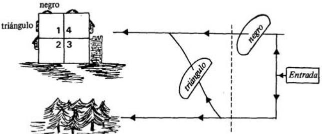
grande y rayada?
¿cuadrada y rayada?

Analizando el sentido de las proposiciones a y c se ve que "o" tiene en ambos casos sentidos diferentes.

Consideremos el primer caso; tomando un elemento cualquiera del conjunto, éste tiene una de las dos propiedades pero no las dos a la vez. Llamaremos a esta conectiva ***disyunción excluyente o alternativa.***

Para c cada pieza del conjunto tiene, al menos, una de las dos propiedades, pero puede también tener las dos simultáneamente. Esta conectiva se llama ***disyunción de inclusión*** o simplemente ***disyunción.***

2.- He aquí una red:

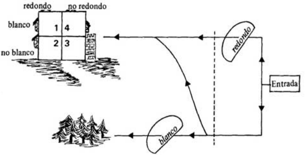


¿Cuáles son las salas ocupadas? ¿Cuáles son las piezas que van al bosque? Cada pieza de la salida, ¿qué propiedades tiene?

Evidentemente para cualquier elemento de la salida es válida la expresión "x es triángulo o negro". Si a la proposición " ● es negro" se la llama "p" y a " ● es triángulo" se la designa con "q", " ● es negro o triángulo" se expresa "p v q".

¿A cuáles de las dos disyunciones corresponde esta red?

3.- Por esta red circulan todas las piezas:



a) ¿Cuántas regiones del diagrama están ocupadas?

b) ¿Cuáles son las piezas que van al bosque?

c) Si no hay más que "no redondos" en el bosque, ¿dónde están todos los redondos?

Si no hay más que "blancos" en el bosque, ¿dónde están todos los "no blancos"?

Entonces sobre el diagrama están todas las que no son a la vez .... y ....

¿Hay alguna otra cosa?

Las piezas son .... o ....

Se puede ver aquí otra vez el sentido especial del "o inclusivo". Se tiene sobre el diagrama todos los "redondos", así como todos los "no blancos", y por consiguiente todos los "redondos no blancos".

Volviendo a la red del punto 2 todas las piezas de la salida son "negras o triángulos". Tomando un representante de cada región, vamos a construir la tabla de verdad de la disyunción analizando los valores de verdad de los atributos con respecto a esa pieza.

	x es negra	*x es triángulo*	*x es negra o triángulo*
Una pieza de 1	V	V	V
Una pieza de 2	V	F	V
Una pieza de 4	F	V	V
Una pieza de 3			

¿Cuáles son los valores de verdad para una pieza correctamente ubicada en la región 3? Completar la tabla.

4.- a) Si sabemos que "p v q" es falso, ¿qué podemos decir del valor de verdad de "p" por un lado, y de "q" por otro?

b) Suponemos que "p v q" es verdadero. ¿Qué se puede decir de "q" si "p" es falso? ¿Y si "p" es verdadero?

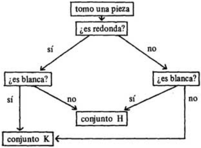
5.- Si "p" significa "yo juego", y "q" "yo canto", "p v q" significa "yo juego o canto".

a) Si "p v q" es verdadero y "q" es falso ¿juego o no juego?

b) Si "p v q" es verdadero y "q" es verdadero ¿juego o no juego?

c) Si "juego o canto" es falso ¿qué significa ésto para "p" y para "q"?

6.- a) Tomar:  y clasificarlos según el siguiente organigrama:



Las piezas del conjunto H son .... o ....

b) En este caso el "**o**" está en **sentido exclusivo** porque no se da el caso de que un elemento de H sea "a la vez" redondo y blanco.

Si para △ que es un elemento de H se plantea:

p : " △ es redondo", q : " △ es blanco"

la proposición compuesta

" △ es redondo o blanco"

se simboliza: "p w q"

¿Cómo se ubican en este diagrama los elementos de H?

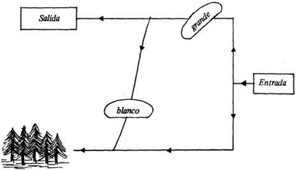
	redondos	no redondos
blancos	1	4
no blancos	2	3

c) Vamos a analizar los valores de verdad para un representante de cada región:

	x es blanco	*x es redondo*	*x es blanco o redondo*
○	V	V	F
●	F	V	V
▲	F	F	F
△	V	F	V

Es evidente que en este caso la proposición compuesta es verdadera cuando lo es **solamente una** de las proposiciones componentes.

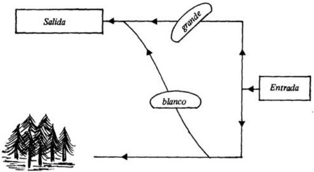
7.- a) Hacer circular todas las piezas en la siguiente red:



Completar utilizando los atributos dados: las piezas de la salida son a la vez .... y ....

¿Cómo se enuncia la propiedad de las piezas que no llegan a la salida?

b) En la siguiente red:



¿Por cuántas puertas pasan las piezas que llegan a la salida?

Completar:

Las piezas de la salida son .... o ....

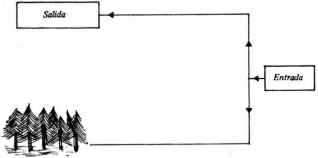
8.- Comparar el recorrido de cada red, y la disposición de los carteles. ¿Qué se observa? ¿Existe alguna relación entre el tipo de red y el conectivo lógico que representan?

9.- *Ejercicios:*

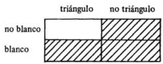
a) Tomar todas las piezas indicadas por el siguiente diagrama:

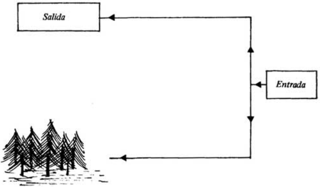
	cuadradas	no cuadradas
negras		
no negras		

Para ese conjunto (rayado en el diagrama) ¿cuál es la parte que le falta a la siguiente red?



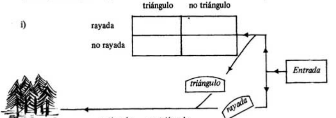
b) Idem al ejercicio anterior, pero tomando el conjunto siguiente:



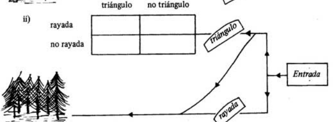


c) He aquí redes para las piezas:

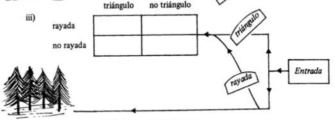
i)



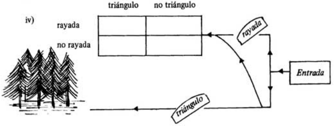
ii)



iii)



iv)



– ¿Cuántos caminos hay para llegar a la salida en cada caso?

– Representar cada salida en el diagrama correspondiente.

– Elegir una región de un diagrama y dibujar la red que tenga como salida sólo los elementos de esa región. Repetir eligiendo otra región.

– Elegir tres regiones y dibujar la red que tenga como salida sólo los elementos de esas regiones. Repetir eligiendo otras regiones.

d) Tomar estas piezas:

i) ¿Se puede decir que todas las piezas son:

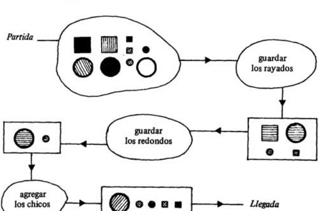
– a la vez negras y cuadradas? sí - no
– negras o cuadradas? sí - no

ii) ¿Qué se debe quitar a este conjunto para que todas esas piezas sean a la vez cuadradas y no negras? Construirlo.

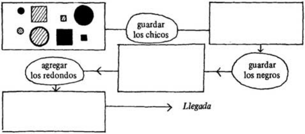
iii) ¿Qué se puede agregar a este conjunto encontrado en ii) para que sus elementos sean "cuadrados o no negros"? Probar de construir "el más grande conjunto".

iv) Hacer ejemplos similares con otras piezas: construir un conjunto asociado a un "o" y probar de pasarlo a un conjunto asociado a un "y", o bien a la inversa.

e) Este es el juego de "guardar-agregar". Aquí un ejemplo:



Completar la cadena siguiente:



f) i) Partiendo de:

tratar de obtener, mediante la cadena "agregar-guardar", el siguiente conjunto:

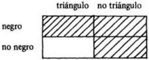
¿Cuál es la red que lleva estas piezas a la salida?

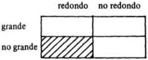
ii) De la misma partida, se debe obtener mediante "guardar-agregar" este conjunto:

¿Cuál es la red?

iii) Lo mismo para esta llegada:

g) Dibujar la red correspondiente a la parte rayada de los diagramas siguientes:





Ficha 5 Condicional.

1.- Determinar una parte de I para la cual sea verdadero que "cada pieza es no negra o cuadrada" (puede servir de ayuda un diagrama de Carroll).

a) Tomar de ese conjunto todas las piezas "negras", ¿se puede decir algo que sea verdadero para todas las piezas que se acaban de retirar? Es verdad que todas son "negras", pero también todas son ....

b) Volver a colocar las piezas "negras" y retirar las "cuadradas". ¿Se puede decir que todas las piezas "cuadradas" retiradas son "negras"?

c) Volver a colocar todos los "cuadrados" y retirar todos los "no cuadrados". Todas esas piezas son las no .... de las no ....

2.- Considerar la salida de la red del apartado 3 de la ficha 4. ¿Es el resultado de la conjunción de "redondos" con "no blancos"? ¿Es el resultado de la disyunción de "redondos" con "no blancos"? ¿Hay "no blancos" en ella? ¿Cuáles? Todos los "no blancos" ¿están en la salida? ¿Hay "blancos"? Si es así, ¿cuáles?

¿Quiénes van al bosque? Los que son .... y no .... que también se puede expresar: "no es cierto que son ....".

3.- Alguna(s) de las siguientes expresiones sirve(n) para determinar los elementos de la salida de la red anterior; completarla(s) empleando un solo atributo ("blanco", "no blanco", "redondo", "no redondo").

Si se toma una pieza "blanca" entonces es ....
Si se toma una pieza "no blanca" entonces es ....
Si se toma una pieza "redonda" entonces es ....
Si se toma una pieza "no redonda" entonces es ....

4.- Dadas las siguientes piezas de I:

para estas piezas es verdadera la frase "si tomo un cuadrado entonces es rayado". Agregar una pieza cualquiera y verificar si la frase dada sigue siendo verdadera, es decir, si se toma un "cuadrado" éste es "rayado".

Repetir este análisis con cada una de las piezas del conjunto I.

Si se agrega un O , ¿sigue siendo verdadero el enunciado? Evidentemente cualquier cuadrado que tomemos es "rayado".

Si se agrega un □ , ¿se tiene la seguridad de que si se toma **cualquier cuadrado** éste será "rayado"? ¿Y si se agrega un triángulo rayado?

¿Se puede agregar cualquier pieza "cuadrada"? ¿Se puede agregar cualquier pieza "no cuadrada"? ¿Qué piezas son las que se pueden agregar para que la frase siga siendo verdadera? ¿Cuáles son las piezas que no se pueden agregar?

Cuando se hayan encontrado todas las piezas que hagan verdadero el enunciado "si tomo un cuadrado entonces es rayado", se habrá construido "el más grande conjunto" asociado a la propiedad dada.

Si se representa este conjunto en un diagrama como el siguiente:

no rayado	1	4
rayado	2	3
	cuadrado	no cuadrado

¿Cuáles son las regiones ocupadas?

Se verifica que las regiones ocupadas son 2, 3, 4. En efecto, tomando un elemento x cualquiera (de los que pertenecen a esas regiones) y sustituyendo a x en "si x es cuadrado entonces x es rayado", se obtiene una proposición verdadera.

Por ejemplo:

Para ▨ : "si ▨ es cuadrado entonces ▨ es rayado".

Para △ : "si △ es cuadrado entonces △ es rayado". La proposición es verdadera porque la condición de rayado se exige solamente si es un cuadrado.

Para ◬ : "si ◬ es cuadrado entonces ◬ es rayado". Es verdadera por lo mismo.

5.- Los enunciados que responden a la forma:

"si .... entonces ...."

se llaman ***condicionales.***

La forma lógica de:

"si △ es cuadrado entonces △ es rayado"

para

p : "△ es cuadrado" q : "△ es rayado"

es:

$$\text{“}p \supset q\text{”}$$

Lo que afirma un enunciado condicional del tipo "si △ es cuadrado entonces △ es rayado", es que la primera proposición (antecedente) implica la segunda (consecuente). No afirma que el antecedente sea verdadero, sino solamente que **si lo es, entonces lo es el consecuente.**

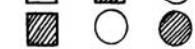
Tampoco afirma que el consecuente sea verdadero, sino sólo que lo será necesariamente si el antecedente lo es.

Un condicional resultará falso si se verifica el primer suceso (antecedente) y no se verifica el segundo (consecuente). El significado esencial de un condicional es el **nexo** entre antecedente y consecuente.

6.- De las siguientes partes de I:

a) 

b) 

c) 

d) 

i) ¿Cuál está definida por la propiedad "x es no blanca o x es cuadrada"?

La pregunta se responde reemplazando "x" por cada elemento en la frase simbolizada, y verificando en cada caso si la disyunción es verdadera. Conviene recordar que la disyunción es falsa si sus dos componentes son falsos.

ii) Enunciar otras disyunciones para definir los conjuntos restantes.

iii) En d) se verifica que "si tomo una pieza blanca entonces será cuadrada". Con este modelo y con los atributos "blanco", "no blanco", "cuadrado", "no cuadrado", formular las expresiones que sean verdaderas para cada una de las partes a, b y c.

7.- a) Tomar el "más grande conjunto" asociado a la propiedad "si x es negro entonces x es triángulo". ¿Es verdadera la proposición que se obtiene si se sustituye la "x" por un "triángulo no negro"? ¿Y para una pieza "no triángulo no negro"?

b) Enunciar la propiedad asociada a ese conjunto que responda al tipo
"x es no .... o ...."

c) Dibujar un diagrama de Carroll para los dos atributos trabajados ("negro", "triángulo") y eligiendo tres de sus regiones determinar la proposición en forma de condicional y de disyunción.

8.- Vamos a analizar las relaciones entre las expresiones del tipo condicional y del tipo disyuntivo.

a) En el apartado 4 de esta ficha, las propiedades asociadas al conjunto obtenido se pueden expresar de dos maneras distintas.

- "si x es cuadrado entonces x es rayado";
- "x es no cuadrado o x es rayado".

Resulta claro que la disyunción de proposiciones a partir de un condicional se obtiene negando la proposición que constituye el antecedente.

b) En los ítems 6 y 7 está planteado el problema inverso, ¿cómo pasar de una forma disyuntiva a un enunciado condicional?

En el apartado 6, para d se pasa de "x es no blanco o x es cuadrado" a "si x es blanco entonces x es cuadrado".

Para el inciso c se pasa de "x es rayado o x es redondo" a "si x es no rayado entonces x es redondo".

En 7.a) de "si x es negro entonces x es triángulo" se obtiene "x es no negro o x es triángulo".

¿Se puede aplicar en sentido inverso la regla enunciada en el apartado 3? En efecto, se ve que la negación del antecedente es la proposición correspondiente al primer término de la disyunción.

9.- Formar el conjunto asociado a la propiedad "x es chica o no triángulo".

Si se toma una pieza que "no es chica", es seguro que será no ....

Si "no es chica" entonces es ....

Si se toma un "triángulo" ¿se puede enunciar otro atributo de ella? ¿Cómo se expresa bajo la forma de un condicional?

En este punto se enuncian dos condicionales para un mismo conjunto definido por "x es chica o x es no triángulo".

Vemos aquí que a partir de una disyunción se pueden obtener dos enunciados condicionales diferentes pero equivalentes, ello debido a la conmutatividad de la disyunción.

10.- a) Formar el "más grandes conjunto" asociado a la propiedad del tipo "x es .... o no ...." y enunciar los dos condicionales que se pueden verificar en él.

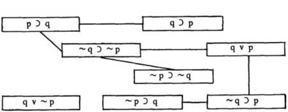
b) Probar ahora de determinar los condicionales que pueden ser deducidos de las proposiciones disyuntivas siguientes:

$$\sim p \vee q \quad ; \quad p \vee \sim q$$

c) Unir las proposiciones equivalentes:

$p \supset q$	$p \vee q$
$q \supset p$	$p \vee \sim q$
$\sim p \supset q$	$\sim p \vee q$
$\sim q \supset p$	$\sim p \vee \sim q$

d) Sabiendo que los trazos deben unir proposiciones equivalentes; en el siguiente esquema ¿dónde hay error?, ¿hay trazos que faltan?



11.- Sabemos que una disyunción puede ser escrita bajo la forma de un condicional. Así por ejemplo, el "más grande conjunto" asociado a la propiedad "si x es blanco entonces x es cuadrado" es el mismo asociado a "x es no blanco o x es cuadrado".

De allí resulta que una expresión puede reemplazar a la otra e inversamente.

Completar la tabla de verdad para el condicional:

Para	x es blanco	x es cuadrado	x es no blanco	x es no blanco o x es cuadrado	si x es blanco entonces x es cuadrado
□	V	V	F	V	V
△	V	F	F	F	
■	F	V	V	V	
▲	F	F	V	V	

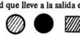
De donde se puede decir que un condicional es falso solamente en el caso que su antecedente sea verdadero y el consecuente falso.

12.- Se presentan aquí expresiones lingüísticas simbolizadas por las propiedades de las piezas:

"círculo"	"el gato corre al ratón"
"cuadrado"	"el gato no corre al ratón"
"negro"	"el gato caza al ratón"
"rayado"	"el gato no caza al ratón"

a) Construir una red (con los atributos de forma y color) que lleve solamente los "círculos negros" a la salida. Enunciar la proposición correspondiete utilizando las frases.

b) Construir una red que lleve a la salida el siguiente conjunto:



(No olvidar que ■ no puede salir).

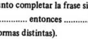
Para este conjunto completar la frase siguiente:

"si .... entonces ...."

(Hacerlo de dos formas distintas).

c) Enunciar los dos condicionales equivalentes utilizando las frases.

13.- a) Considerar el siguiente conjunto:



Entre los siguientes condicionales referidos a él, ¿cuáles son verdaderos?:

"Si tomo una pieza negra, entonces será cuadrada".
"Si tomo una pieza cuadrada, entonces será negra".
"Si tomo una pieza blanca, entonces será grande".
"Si tomo una pieza pequeña, entonces será blanca".

b) Buscar otros condicionales que sean verdaderos y otros que sean falsos para estas cuatro piezas.

c) Elegir entre las frases encontradas una frase verdadera para este conjunto, por ejemplo: "si tomo una rayada, será pequeña".
Agregar todas las piezas posibles de I de manera tal **que la frase elegida siga siendo verdadera.**

¿Se puede agregar cualquier pieza "rayada"?
¿Se puede agregar cualquier pieza "no rayada"?
¿Se puede agregar cualquier pieza "chica"?

Ficha 6 Bicondicional.

1.- Tomar las piezas siguientes:

Para ellas, ¿cuál de las dos frases siguientes es verdadera?:

- "Si x es negra entonces x es grande".
- "Si x es grande entonces x es negra".

¿Qué piezas habría que quitar para que las dos expresiones sean verdaderas a la vez?

2.- a) Representar en el siguiente diagrama el "más grande conjunto" para el cual sea verdadera la frase "si x es blanco entonces es triángulo".

	triángulo	no triángulo
blanco		
no blanco		

b) Idem para la frase "si x es triángulo entonces x es blanco".

c) ¿Qué regiones hacen verdadera **a la vez** a las frases de a y de b?

¿Las piezas "no blancas no triángulos" forman parte de ellas? ¿Y los "triángulos no blancos"? ¿Y los "blancos no triángulos"? ¿Y los "triángulos blancos"? Evidentemente la primera y última pregunta tienen respuesta afirmativa.

3.- a) Contruir un conjunto para el cual las frases siguientes sean verdaderas:

- "Si x es chico entonces x es blanco".
- "Si x es blanco entonces x es chico".

b) ¿En qué regiones del diagrama se puede representar ese conjunto?:

	chico	no chico
blanco		
no blanco		

c) ¿Qué otras frases condicionales son verdaderas para ese conjunto?

d) ¿Qué frases condicionales donde se usen los atributos "chico", "no chico", "blanco", "no blanco" son falsas para el conjunto obtenido? ¿Cuáles son las regiones que corresponden a esos nuevos condicionales?

4.- a) Tomar todas las piezas del conjunto I. Construir el "más grande conjunto" que haga verdadera la expresión "son solamente los negros los que son grandes". ¿Tiene cabida en él un "no negro grande"? ¿Cómo deben ser los "no negros"? ¿Se encuentra un "negro chico"? ¿Cualquier "negro"?

b) Encontrar una frase del tipo "x es .... o x es ...." que sea verdadera para el conjunto.

c) Probar de encontrar otra frase verdadera para este conjunto del tipo "solamente los .... son ....", distinta a la del item a).

5.- a) Tomar todos los cuadrados de I. Buscar el "más grande conjunto" que haga verdadera la expresión "todos los grandes son negros pero los chicos no lo son".

¿Cuáles son las zonas del siguiente diagrama que representan ese conjunto?:

	negro	no negro
grande		
no grande		

b) ¿Cómo se pueden encontrar las piezas "negras"? Solamente tomando las ....
....

Si se toma una pieza "grande" del conjunto, será ....

¿Cómo se pueden encontrar las piezas "no negras"? **Solamente si** se tomas los ...
....

Si se toma una pieza "chica" será ....

Se puede concluir que: **si** se toma una pieza "grande" será "negra", y esto ocurre **solamente si** se toma una "grande".

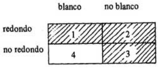
c) Completar la frase:

"Si se toma una pieza .... ésta será "no negra" y eso ocurre solamente si se toma un ....".

Esta expresión se puede reducir a:

"**Si y sólo si** se toma una pieza .... ésta será "no negra".

6.- Considerar el diagrama siguiente:



a) Para el conjunto rayado sobre el diagrama, ¿es verdadero que si se toma un "blanco" entonces es "redondo"? Completar:

"Si x es .... entonces x es ....".

b) ¿Es verdadero ahora que si se toma un "redondo" solamente se obtiene un "blanco"? ¿Se puede tener un "redondo" que sea "no blanco"?

c) ¿Qué se debe quitar al conjunto para que tomando un "redondo" se obtenga solamente un "blanco"? ¿Es necesario quitar los elementos de la región 3? ¿Qué regiones quedan?

d) Trabajaremos ahora únicamente con las regiones que quedan:

– Si x es "redonda" entonces es ....

¿Cómo se puede encontrar una pieza "no blanca"?

– Solamente si x es ....

Estas dos expresiones a completar se pueden resumir en:

– "si y sólo si x es redonda entonces x es blanca".

e) Construir el "más grande conjunto" para que sea verdadera la frase "si y sólo si x es blanca entonces x es redonda".

f) Si se comparan los conjuntos obtenidos en c) y e) se observa que ocupan las mismas regiones (1 y 3), es decir que las expresiones:

"si y sólo si x es redonda entonces x es blanca"
"si y sólo si x es blanca entonces x es redonda"

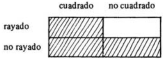
son equivalentes.

7.- a) Formar y representar en un diagrama de Carroll el "más grande conjunto" para que la frase siguiente sea verdadera:

"si x es cuadrado entonces x es rayado"

¿Qué otra frase del tipo "si x es un no .... entonces x es un no ...." es verdadera para este conjunto?

b)



¿Para este diagrama, cuál es el condicional asociado? Completar:

"si x es .... entonces x es ...."

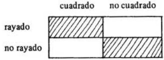
lo que es equivalente a:

"si x es no cuadrado entonces x es no rayado".

c) Teniendo en cuenta los diagramas a) y b), rayar las regiones para las cuales son verdaderos simultáneamente los condicionales:

"si x es un cuadrado entonces x es rayado"
"si x es rayado entoces x es cuadrado"

El diagrama obtenido es:



d) La conjunción de los dos condicionales anteriores:

"si x es cuadrado entonces x es rayado"
"si x es rayado entoces x es cuadrado"

puede expresarse como:

"**si y sólo si** x es cuadrado entonces x es rayado"

"Si y solamente si" es una nueva conectiva que se llama ***"bicondicional"***. Como su nombre lo indica, expresa un condicional doble, es decir, un condicional que se cumple en ambas direcciones.

Simbolización:

"si y sólo si  es cuadrado entonces  es rayado"

proviene (según d) de:

"si  es cuadrado entonces es rayado"

p q

y de:

"si  es rayado entonces  es cuadrado"

q p

La conjunción de ambas proposiciones condicionales define el bicondicional, es decir:

"$(p \supset q) \wedge (q \supset p)$" equivale a: "$p \equiv q$"

donde el símbolo "$\equiv$" se lee: "si y sólo si".

e) Construir la tabla de verdad del bicondicional:

p	q	$p \supset q$	$q \supset p$	$(p \supset q) \wedge (q \supset p)$	$p \equiv q$
V	V	V	...	...	...
...	...	...	...	...	...

8.- Observando cierto conjunto, Natalia dice: "todo elemento es un redondo si y sólo si es rayado". Tomando una pieza de ese conjunto, expresa: "no es redondo". ¿Qué se puede afirmar de esa pieza?

9.- a) Escribir los siguientes enunciados bajo la forma de condicional o implicación, considerando:

"p" : "estoy cansado"
"q" : "descanso"

- Si estoy cansado, entonces descanso.
- Si descanso, entonces estoy cansado.
- Descanso solamente si estoy cansado.
- Estoy cansado solamente cuando descanso.

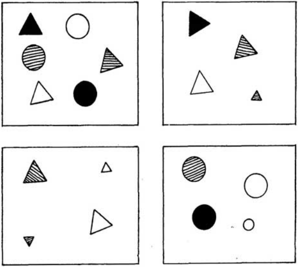
b) Suponiendo que son verdaderos, ¿cuáles son equivalentes? Elegir dos enunciados no equivalentes y deducir una conclusión del tipo "si y sólo si ....".

c) Inversamente, encontrar dos enunciados que permitan deducir:

"$\sim p \equiv \sim q$"

Ficha 7 Cuantificadores.

1.- Se ha agrupado algunos elementos de I en tarjetas:



a) ¿Para cuáles de esas tarjetas son verdaderas las proposiciones siguientes?:

- "hay redondos"
- "no hay redondos"
- "hay triángulos"
- "no hay triángulos"

b) Analizar, para la misma serie de tarjetas, las proposiciones:

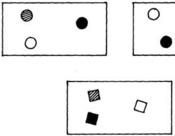
- "hay negros"
- "no hay negros"
- "hay no negros"
- "no hay no negros"

¿Qué particularidad tienen las proposiciones agrupadas en a) y en b)?

c) Escribir cuatro proposiciones del tipo de las empleadas en a) y determinar para cada una de ellas las tarjetas en las que las proposiciones son verdaderas.

2.- Elegir dos de las proposiciones de 1.a). Buscar una tarjeta para la cual sean verdaderas ambas proposiciones. ¿Es posible para cualquier par de proposiciones?

3.- a)

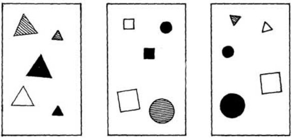


Para cada tarjeta, encontrar las proposiciones verdaderas:

- "todos son redondos"
- "no todos son redondos"
- "todos son cuadrados"
- "no todos son cuadrados"

Se observa que si una proposición es verdadera para una tarjeta, su negación es falsa para la misma. Sobre una tarjeta donde no hayan más que "redondos" es verdadero que "todos son redondos", y por consiguiente su negación "no todos son redondos", es falsa.

b) Dadas las siguientes tarjetas:



escribir cuatro proposiciones con: "todos son", "no todos son", que ellas sugieran.
¿Para cuáles de las tarjetas anteriores son verdaderas las siguientes frases?:

- "todos son no triángulos"
- "no todos son no triángulos"
- "todos son triángulos"
- "no todos son triángulos"

4.- La expresión "para todo x" recibe el nombre de ***cuantificador universal*** y tiene el mismo significado que "todos son", "cualquiera sea x", "para cualquier x", "cada x", y se escribe abreviadamente "$\forall$".

La locución "existe x tal que", recibe el nombre de ***cuantificador existencial*** y tiene el mismo significado que "existe por lo menos uno", "hay un x que", "algún x es", y se escribe "$\exists$".

Una proposición precedida por el cuantificador universal o por el existencial puede ser afectada por una **negación**. En el primer caso se expresa: "no todos son", y en el segundo: "no hay".

Por ejemplo, para negar la proposición "hay varones en la clase", debemos decir "no hay varones en la clase".

Para negar "todos están presentes", diremos "no todos están presentes".

En estos ejemplos hemos negado el cuantificador, pero ellos pueden referirse a atributos de naturaleza afirmativa o negativa.

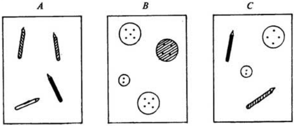
Así en el ejemplo anterior, "todos están presentes", si se niega el atributo "presente", se obtiene, "todos están ausentes".

Analizando simultáneamente los cuantificadores universal y existencial con sus respectivas negaciones en un atributo y su negación, se obtienen ocho proposiciones que en términos generales pueden expresarse:

- Todos los x son y.
- No todos los x son y.
- Todos los x son no y.
- No todos los x son no y.
- Hay un x que es y.
- No hay un x que es y.
- Hay un x que es no y.
- No hay un x que es no y.

Comparemos estos ocho tipos de expresiones en un ejemplo concreto:

5.-



a) Para cada una de las proposiciones siguientes, indicar las tarjetas para las cuales ellas son verdaderas:

- "hay lápices"
- "no hay lápices"
- "hay botones" (equivalente en este ejemplo a "hay no lápices")
- "no hay botones" (equivalente en este caso a "no hay no lápices")

b) Hacer lo mismo para estas proposiciones:

- "todos son lápices"
- "no todos son lápices"
- "todos son botones" (equivalente a "todos son no lápices")
- "no todos son botones" (equivalente a "no todos son no lápices")

c) Resumimos en una tabla los datos obtenidos en a y b, marcando con una cruz la proposición que es verdadera para cada tarjeta:

proposiciones \ *tarjetas*	*A*	*B*	*C*
i : "hay lápices"	×		×
ii : "no hay lápices"		×	
iii : "hay botones"		×	×
iv : "no hay botones"	×		
v : "todos son lápices"	×		
vi : "no todos son lápices"		×	×
vii : "todos son botones"		×	
viii : "no todos son botones"	×		×

¿Qué se deduce del estudio de esta tabla: Se observa que las proposiciones i) y viii) son verdaderas para las tarjetas A y C. La proposición ii) es verdadera sólo para la tarjeta B; ¿qué otra proposición es también verdadera sólo para la tarjeta B? Los pares de proposiciones que determinan el mismo conjunto son equivalentes.

Completar:

i es equivalente a **viii**
ii es equivalente a ......
iii es equivalente a ......
... es equivalente a **v**

Las equivalencias precedentes nos permiten reducir a cuatro el número de proposiciones simples con el uso de los cuantificadores. Ellas son de la forma:

- "todo x es y"
- "todo x es no y"
- "hay x que son y"
- "hay x que no son y"

Ficha 8 Ejercicios.

1.- Si se toma una pieza de I que haga verdadera la propiedad:

"x es chica o x es no cuadrada"

y se observa que es "cuadrada", ¿se puede concluir que es también "chica"?

2.- Pablo toma una pieza del conjunto I y dice:

"no es negra o no es cuadrada"

Pedro, que lo mira, dice:

"es negra"

¿Qué puede deducir Enrique que no ve esa escena pero que ha escuchado todo?

3.- Juan toma una pieza y dice:

"es un no cuadrado no negro"

¿Qué se puede deducir de esa expresión?

4.- a) Considerar la disyunción:

"x es cuadrado o x es rayado"

y formar el "más grande conjunto" (con elementos de I) que la hagan verdadera.
¿Qué se debe quitar de ese conjunto para que queden sólo los "no cuadrados"? ¿Qué otra propiedad tienen los "no cuadrados" que quedan?

b) Formar el "más grande conjunto" asociado a:

"x es grande o x es no blanco"

Quitar los elementos que sea necesario para que queden solamente los "no grandes". ¿Qué se puede deducir para los elementos de este nuevo conjunto?

5.- a) Construir la tabla de verdad de "$p \vee \sim p$". ¿Qué se observa? ¿Son válidas las siguientes deducciones?:

– Si "p" es verdadera, entonces "p v ∼ p" es verdadera.
– Si "p ∧ p" es verdadera, entonces "p v ∼ p" es verdadera.
– Si "q" es verdadera, entonces "p v ∼ p" es verdadera.
– Si "q" es falsa, entonces "p v ∼ p" es verdadera.

Es evidente que en estas deducciones las premisas que constituyen el antecedente importan poco ya que la conclusión final es siempre verdadera, ¿por qué?

b) Construir ahora la tabla de verdad de "p ∧ ∼ p", ¿qué se observa?

6.- Con ayuda de las tablas de verdad de las conectivas ya vistas, completar las deducciones siguientes:

– Si "p ∧ q" es verdadera, entonces "p" es ....
– Si "p ∧ q" es verdadera, entonces "q" es ....
– Si "p" es verdadera, "q" es verdadera; entonces "p ∧ q" es ....
– Si "p v q" es verdadera, "p" es falsa; entonces "q" es ....
– Si "∼ p ∧ q" es verdadera, entonces "p" es ....
– Si "p" es verdadera, "∼ p v q" es verdadera; entonces "q" es ....
– Si "∼ p v ∼ q" es verdadera, "q" es verdadera; entonces "p" es ....
– Si ....; entonces "∼ p v q" es verdadera.
– Si ....; entonces "p" es verdadera.
– Si ....; entonces "p v q" es verdadera.
– Si ....; entonces "q" es falsa.

7.- a) Si se sabe que "p ≡ q" es verdadera, ¿se pueden deducir los valores de verdad de "p" y de "q"? (Puede ser de ayuda la tabla de verdad).

b) Completar las deducciones siguientes:

– Si "p ≡ q" es verdadero, "p" es verdadero; entonces "q" es ....
– Si "p ≡ q" es verdadero, "q" es verdadero; entonces "p" es ....
– Si "p ≡ q" es verdadero, "q" es falso; entonces "p" es ....
– Si "p ≡ q" es verdadero, entonces "∼ p ≡ ∼ q" es.................................
– Si "p ≡ q" es verdadero, entonces "q ≡ p" es.......................................
– Si "p ≡ q" es verdadero, entonces "p ⊃ q" es.......................................
– Si "p ≡ q" es verdadero, entonces "q ⊃ p" es.......................................
– Si "p ⊃ ∼ q" es verdadero, "∼ p ⊃ q" es verdadero; entonces "p ≡ ∼ q" es ....
– Si "∼ p ⊃ q" es verdadero, "q ⊃ ∼ p" es verdadero; entonces "p ≡ ∼ q" es ....

8.- Se consideran los enunciados siguientes:

"q"	:	"hoy es un lindo día"
"∼ q"	:	"hoy no es un lindo día"
"p"	:	"yo paseo"
"∼ p"	:	"yo no paseo"
"s"	:	"los pájaros cantan"
"∼ s"	:	"los pájaros no cantan"

a) Sabiendo que:

"$q \supset p$" es verdadero
"$q \supset s$" es verdadero
"s" es falso

¿Se puede deducir si paseo o no paseo?
Transformar esta deducción en una "historia" usando las frases completas.

b) He aquí una historia:

i) Yo no paseo pero hoy es un lindo día. (*atención:* "pero" equivale a "y")
ii) Los pájaros cantan si y sólo si hoy no es un lindo día.
iii) Yo no paseo.

c) Si i) es falso y las otras dos expresiones son verdaderas, ¿qué se puede concluir?

9.- Sabiendo que se debe simbolizar con:

"p" : "Juan bebe"
"q" : "Juan conduce"

determinar cuáles de los siguientes condicionales son equivalentes:

- "si Juan bebe, no conduce"
- "si es falso que Juan bebe, entonces Juan conduce"
- "si Juan conduce, entonces no es cierto que Juan bebe"
- "si es falso que Juan conduce, Juan bebe"

10.- Simbolizando:

"p" : "Marcos tiene 16 años"
"q" : "Beatriz tiene 8 años"
"r" : "Pablo tiene 20 años"

y sabiendo que las siguientes proposiciones moleculares son verdaderas, ¿qué se puede decir de las edades de Marcos, Beatriz y Pablo? (Simbolizar).

- Si Marcos tiene 16 años, Beatriz no tiene 8 años.
- Pablo no tiene 20 años o Marcos tiene 16 años.
- Si Pablo no tiene 20 años, Beatriz tiene 8 años.
- Si Pablo no tiene 20 años, Beatriz no tiene 8 años.

11.- He aquí tres proposiciones verdaderas:

"p" : "yo canto"
"q" : "si paseo entonces estoy contenta"
"r" : "si estoy contenta entonces no canto"

¿Cuáles de las frases siguientes se pueden deducir de ellas?:

- "Si estoy contenta, entonces paseo"
- "Yo canto o estoy contenta"
- "Si no estoy contenta entonces no tengo ganas de pasear"
- "Yo no paseo"

12.- Se encuentran sentados a una mesa redonda un almacenero, un carnicero, un kiosquero y un panadero. López es carnicero y está sentado a la izquierda de Durán. García está a la derecha del almacenero. Martínez, que está sentado enfrente de Durán, no es panadero. ¿Qué oficio tiene García?

13.- La Sra. Sofía tiene un hijo en cada una de las siguientes universidades: Córdoba, Rosario y Tucumán. Cada uno de sus hijos estudia carreras diferentes: abogacía, filosofía y medicina.

Juan no está en Córdoba, David no está en Rosario. El que está en Córdoba no estudia abogacía. El que está en Rosario estudia filosofía. David no estudia medicina. ¿Qué estudia Tomás y dónde?

14.- a) Paula pensó una palabra de cinco letras. Sus compañeros le hacen las siguientes preguntas:

- ¿La primer letra está en la palabra "luz"?
  Sí.
- ¿La primer letra está en la palabra "elevo"?
  Sí.
- ¿La primer letra está en "iba"?
  No.

Los niños piensan que la primer letra es "l". El juego continúa. Aquí las respuestas a todas las preguntas formuladas:

Palabras propuestas	*"luz"*	*"elevo"*	*"iba"*	*"bota"*	*"risa"*	*"púas"*
primer letra	sí	sí	no	no	no	no
segunda letra	no	no	sí	no	sí	no
tercer letra	no	no	sí	sí	no	no
cuarta letra	no	no	no	no	sí	no
quinta letra	no	sí	no	sí	no	no

¿Cuál es la palabra elegida por Paula?

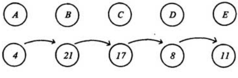
b) Un primer jugador piensa una palabra de 5 letras y la escribe en un papel que oculta. Cada participante hace la tabla y escribe las palabras propuestas por los otros jugadores y las respuestas que se obtienen.

El primero que encuentra la palabra es el ganador y es quien vuelve a comenzar el juego.

15.- He aquí un juego donde cada jugador gana un tanto cuando respeta la siguiente regla:

"Si un jugador escribe un natural par, entonces el siguiente debe escribir un múltiplo de 7".

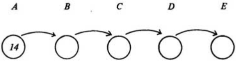
El dibujo siguiente ilustra una partida entre cinco jugadores:



¿Quién ganó? ¿Quién perdió?

"C" escribió 17, cualquiera sea el natural escrito por "D", "D" no puede perder ¿por qué? ¿Qué debe escribir "E" para ganar?

Imaginar una nueva partida de juego, donde solamente "B" pierda:

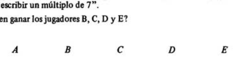


Un jugador ganó escribiendo el número 5, ¿se puede deducir que el jugador precedente había escrito un natural par? ¿Y un múltiplo de 7?

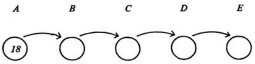
La regla del juego es ahora:

"Si un jugador escribe un natural par inferior a 20, entonces el jugador siguiente debe escribir un múltiplo de 7".

¿Pueden ganar los jugadores B, C, D y E?



Completar la siguiente cadena de manera que B, C, D y E pierdan:



2

Conjuntos

Ficha 1 Introducción.

Material a usar:
fichas recortadas en papel o cartulina con las formas y tamaños siguientes:

□ ▽ ○ ☐ △ ◯

1.- Estas seis fichas forman un conjunto que llamaremos M.

$$M = \{ □, ☐, △, ◯, △, ○ \}$$

□ es un **elemento** del conjunto M; □ **pertenece** a M. Esto, abreviadamente se escribe □ $\in$ M.

¿Qué significa ☆ $\notin$ M?

Completar:

△	$\in$	. . .
○	. . .	M
□	$\notin$	. . .
. . .	$\in$	M
. . .	$\notin$	M
△	. . .	M

2.- Separar un cierto número de elementos de M. Ellos constituyen un conjunto que es ***parte de M*** o ***subconjunto*** de M.

Ejemplos:

$\left\{\bigtriangleup, \circ, \bigcirc, \square\right\}$ es un subconjunto de M.

$\left\{\bigcirc, \bigtriangleup, \Box\right\}$ es un subconjunto de M.

$\left\{\triangle\right\}$ es un subconjunto de M.

$\left\{\triangle, \bigtriangleup, \square, \Box, \circ, \bigcirc\right\}$ es un subconjunto de M que se llama **parte completa de M.**

3.- Hasta aquí, el conjunto M es el ***universo*** o ***referencial.***

4.- Otros ejemplos de conjuntos:

$Y = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$

$B = \{$ días de la semana $\}$

$J = \{$ polígonos regulares $\}$

$T = \{ a, e, i, o, u \}$

$L = \{$ San Luis, m, 5 $\}$

¿Qué particularidad tienen los conjuntos Y, T y L que no tienen B y J?

> Dar una lista de los elementos del conjunto, es **definir el conjunto por extensión.**
> Enunciar una propiedad que permita escribir todos los elementos del conjunto y sólo ellos es **definir el conjunto por comprensión.**

5.- Las grandes ciudades argentinas ¿forman un conjunto? Antes de responder, meditar sobre las siguientes preguntas: ¿Buenos Aires es una gran ciudad argentina? ¿Y Córdoba? ¿Y Tandil? ¿Y General Roca? ¿Y Paraná? ¿Y Trelew?

En realidad ¿cuándo una ciudad argentina es grande? La respuesta no es terminante porque no está claramente definido el concepto "ciudad grande". En ese caso el conjunto no está bien definido.

6.- Hay algunos conjuntos que se utilizan asiduamente y, por ello, resulta cómodo identificarlos con una letra. Por ejemplo:

$N = \{ 0, 1, 2, 3, 4, ..., 15, 16, ..., 305, ... \}$
N es el conjunto de los números naturales.

$A = \{ a, b, c, ch, d, ..., p, q, r, ..., y, z \}$
A es el conjunto de las letras del abecedario castellano.

$Z = \{$ números enteros $\}$
Z es el conjunto de los números enteros (positivos y negativos con el cero).

7.- Sea el conjunto definido por comprensión por una propiedad P que lo caracteriza en el universo U. Se designa este conjunto:

$\{ x / P \}$ que se lee: "conjunto de los elementos que poseen la propiedad P", o, si se quiere recordar el universo:

$\{ x, x \in U / P \}$ ("conjunto de los elementos de U que poseen la propiedad P").

Ejemplos:

$\{ x, x \in N / x > 15 \}$ es el conjunto de los números naturales que son mayores que 15.

$\{ x, x \in M / x$ es cuadrado $\}$ es el conjunto de las fichas de M de forma cuadrada.

8.- **Ejercicios**:

Definir por extensión los conjuntos siguientes:

$L = \{ x, x \in M / x$ es triángulo $\}$
$S = \{ x, x \in \{$meses del año$\} / x$ tiene 31 días $\}$
$R = \{ x, x \in A / x$ figura en la palabra "matemática" $\}$
$E = \{$ colores primarios $\}$

Definir por comprensión los conjuntos siguientes:

En A, $T = \{ a, e, i, o, u \}$
En N, $J = \{ 5, 7, 1, 3, 9 \}$
En M, $I = \{$ ○ , □ , △ $\}$

Ficha 2 Complementario. Inclusión. Conjuntos.

1.- Sea M el conjunto definido en II.1.1. (capítulo II, ficha N° 1, apartado 1; de aquí en más, cada referencia del tipo: número romano.a.b., indicará: el número romano, el número del capítulo; *a*, el número de ficha; *b*, el apartado):

a) definir por comprensión el conjunto F de las fichas □ y. □
b) definir por extensión el conjunto G de las fichas grandes;
c) definir por extensión un subconjunto cualquiera de M;

d) definir por comprensión un subconjunto cualquiera de M;
e) expresar por extensión un subconjunto de M que tenga un solo elemento (los conjuntos de un solo elemento se llaman ***unitarios***);
f) expresar tres subconjuntos de M;
g) expresar por comprensión el subconjunto J del referencial M cuyos elementos no pertenecen a F.
J es la parte complementaria de F con respecto a M que puede escribirse:
$C_M\ F$ ó $\overline{F}$ ó F'.

2.- Cada uno de los conjuntos del apartado anterior son partes de M, ***están incluídos en M.***

Ejemplos:

$G \subset M$ (que se lee: "el conjunto G está incluído en el conjunto M).

$F \subset M$

$C_M\ F \subset M$

$J \subset M$

3.- a) Encontrar el complementario de: $\{$ grandes $\}$ en M.
Encontrar el complementario de: $\{$ naturales pares $\}$ en N.
Encontrar el complementario de: $\{$ vocales $\}$ en A.

b) ¿Cuál es el complementario de $\{$ naturales múltiplos de 10 $\}$ en $\{$ naturales múltiplos de 5 $\}$?

c) Sean A y B dos partes de U. Si $A \subset B$, ¿qué puede decirse de $\overline{A}$ y $\overline{B}$? Aplicar ese resultado en el caso: $U = M$, $G = \{$ grandes $\}$, $A = \{$ triángulos grandes $\}$

4.- Completar la parte punteada con los símbolos $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$ según corresponda:

Misiones .... $\{$ provincias argentinas $\}$

$\{$ Uruguay, Paraná $\}$ .... $\{$ países americanos $\}$

14 .... $\{$ cifras arábigas $\}$

$\{$ números naturales impares $\}$ .... N

$\{$ a, m, b, j $\}$ .... A

a .... $\{$ a $\}$

$\{$ △, △, □ $\}$ .... $\{$ b $\}$

Observación: la gramática enseña que un artículo es siempre seguido por un sustantivo, que una preposición introduce a un sustantivo o a un pronombre, etc. Se puede también hablar de una gramática de los conjuntos, y una gramática tal tiene reglas sin excepciones.

Ejemplo: sea el símbolo $\subset$ ¿está precedido por qué? ¿Es siempre seguido por qué? Las mismas preguntas para el símbolo $\in$.

5.- a) ¿Cuál es el conjunto de letras de la palabra "tela"?

b) La misma pregunta para las palabras "mantel", "mate", "lata", "late", "melenita", "menta" y "lenta".

c) Entre estos 8 conjuntos hay algunos que **tienen los mismos elementos**, ¿cuáles son?

Esos conjuntos son iguales.

d) $\{$ letras de la palabra "mate" $\} \subset \{$ letras de la palabra .... $\}$

$\{$ letras de la palabra "lata" $\} \not\subset \{$ letras de la palabra "menta" $\}$

Buscar otros casos de $\subset$ ó $\not\subset$ entre los conjuntos definidos en este apartado.

Ficha 3 Conjunto de partes.

1.- Sea el subconjunto T de M:

$$T = \left\{ \bigtriangleup , \triangle \right\}$$

Detallar todos los subconjuntos de T. ¿Cuántos subconjuntos son?

2.- En el apartado precedente se ha propuesto un ejercicio. He aquí una forma de investigación para encontrar los subconjuntos de T:

a) en una caja colocar los elementos de T:

$\bigtriangleup$, puede extraerse o no; se decide que SI; se lo retira de la caja;

$\triangle$, puede extraerse o no; se decide que NO; queda en la caja.

Se obtiene de este modo, fuera de la caja, el subconjunto K de T:

$$K = \left\{ \bigtriangleup \right\}$$

b) si el resultado es:

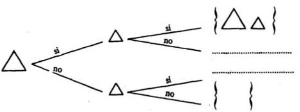
$\bigtriangleup \longrightarrow$ SI

$\triangle \longrightarrow$ SI

se obtiene B = $\{$ .... , ... $\}$

Por este procedimiento se pueden obtener todas las partes de T.

Las posibles elecciones se sintetizan en el esquema siguiente:



Completar el "árbol" indicando en el extremo de cada rama el subconjunto obtenido.

ATENCIÓN: Una rama conduce a $\{\triangle\ ,\ \triangle\}$, o sea a T, parte completa de T. Es decir T ⊂ T (T es parte de T). La rama NO - NO conduce a una parte o subconjunto que no tiene ningún elemento, es el ***conjunto vacío***, que se escribe $\{\ \ \}$ ó $\emptyset$. Es decir $\emptyset \subset$ T ($\emptyset$ es parte de T).

3.- Empleando el procedimiento precedente, encontrar todas las partes del conjunto:

$$R = \{\triangle, \triangle, \square\}$$

¿Cómo se pasa del árbol de partes de T al árbol de partes de R?

4.- ¿Cuántas partes existen para un conjunto de dos elementos? ¿Y para uno de tres elementos? ¿Y para uno de cuatro? ¿Cuántas partes para un conjunto de un elemento? ¿Y de cero elementos? ¿Y de diez? ¿Y de A?

Completar el cuadro siguiente:

Número de elementos del conjunto	**Número de subconjuntos o partes**
....	....
....	....
2	....
3	....
4	....

5.- Sea un conjunto F y dos subconjuntos G y K de F:

$$F = \{5; z; 8; h; m; 4; a\}$$
$$G = \{z; 4; a; 8\}$$
$$K = \{m; 8; z; h\}$$

a) Completar mediante el signo de pertenencia o el signo de inclusión:

z .... K	G .... F	h .... F
$\{h\}$ .... F	m .... $C_F\ G$	$\{4; a\}$ .... G
$\{m; 8; z\}$ .... K		K .... F

b) Contestar cada una de las siguientes preguntas, justificando cada vez la respuesta:

La frase "$4 \notin G$", ¿es verdadera?
La frase "$K \subset F$", ¿es verdadera?
La frase "$\{4; a\} \in G$", ¿es verdadera?
La frase "$\{4; a\} \subset G$", ¿es verdadera?

c) Si se dibuja el árbol de las partes de F ¿cuántas partes se obtienen? Dar un ejemplo de una parte de F que tenga dos elementos y una parte de F que sea un conjunto unitario.

6.- Las letras de la palabra "pájaro" forman una parte de A ¿cuál? La misma pregunta para "papas", "lógica", "tabulador", "camisa".
Una palabra ¿es parte de A? ¿Por qué?
La letra "t" ¿es parte de A?
$\{t\}$ ¿es una parte de A?

7.- ¿Cuál es el complementario de $C_U\ A$ en U? Completar la siguiente expresión:

$$C_U\ (C_U\ A) =$$

¿Cuál es el complementario de U en U? Completar la siguiente expresión:

$$C_U\ U =$$

¿Cuál es el complementario de $\emptyset$ en U? Completar la siguiente expresión:

$$C_U\ \emptyset =$$

Ficha 4 Representaciones gráficas: diagramas de Euler-Venn; árbol; Carroll y Keene.

"Antes de tomar plenamente conciencia de una abstracción, el niño necesita un proceso de representación. Esta representación le permitirá hablar de lo que ha abstraído, de observarlo desde afuera, de salir del juego o del conjunto de juegos, de examinar los juegos y reflexionar sobre ellos. Una de estas representaciones puede ser un conjunto de gráficos, puede ser un sistema cartesiano, puede ser un diagrama de Venn o cualquier otra representación visual o, incluso, auditiva, en el caso de los niños que no piensan esencialmente en forma visual" (Zoltan Paul Dienes, "Las seis etapas del aprendizaje en matemática").

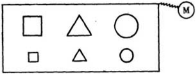
Los medios gráficos deben ser utilizados como soportes representativos de abstracciones ya logradas. Deben ser visiblemente claros y no ambiguos, determinando notoriamente la diferencia gráfica entre conceptos básicos distintos. Por otra parte, su uso inadecuado o incompleto sólo deriva en una comprensión deficiente de ciertas estructuras conceptuales.

Analizaremos, desde este punto de vista, la utilización de ciertos tipos de diagramas, sus alcances y limitaciones.

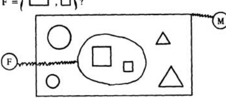
1.- ***Diagramas de Euler-Venn.***

Este tipo de esquema fue utilizado por Leonhard Euler (1707-1783) para representar silogismos. John Venn (1834-1923) se basó en la idea de Euler para realizar la graficación de conjuntos, y creó los diagramas que actualmente se conocen con su nombre.

¿Cómo se representa el conjunto M en un diagrama de Euler-Venn?



¿Y F = { □ , □ }?



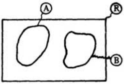
Habitualmente se usa un rectángulo para indicar el referencial, y dentro de él líneas cerradas (y sin entrecruzamientos) para cada conjunto a analizar. Es importante dejar aclarado que **no tiene importancia la forma** de las líneas que se empleen, pero sí es imprescindible que **la línea que representa un conjunto sea cerrada y sin entrecruzamientos.**

Con etiquetas se indican los nombres de los conjuntos representados. Los elementos que pertenecen a cada conjunto puede citarse directamente (por palabras o dibujos) o también marcar puntos o cruces que los representen.

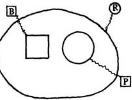
2.- Considerar el siguiente conjunto de gráficos y seleccionar cuáles pueden ser utilizados para representar mediante diagramas de Euler-Venn la siguiente situación:

- Un conjunto referencial R y dos de sus subconjuntos, A y B, que tienen algunos elementos comunes. Justificar la elección en cada caso.

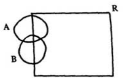
a)



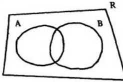
b)



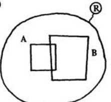
c)



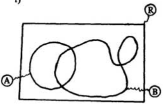
d)



e)



f)



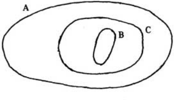
3.- Construir un esquema gráfico para representar cada una de las siguientes situaciones:

a) G = { personas nacidas en América }
   H = { personas nacidas en la República Argentina }
   J = { personas nacidas en la ciudad de Salta }

b) A = { números racionales }
   C = { números enteros }
   B = { 1; 3; 20; −2 }

c) D = { países de América }
   E = { ciudades de América }
   F = { plazas de las ciudades de América }

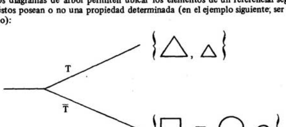
Para el caso b es útil el siguiente diagrama:



¿Cuál de los casos, a) ó c), puede representarse por un diagrama similar? ¿Cuál no? ¿Por qué?

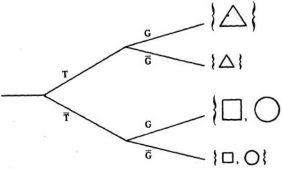
4.- *Diagrama de árbol.*

Los diagramas de árbol permiten ubicar los elementos de un referencial según que éstos posean o no una propiedad determinada (en el ejemplo siguiente, ser triángulo):



El árbol puede continuarse con el estudio de otras propiedades, definidas siempre en el mismo referencial. Por ejemplo:

G = $\{$ ficha grande $\}$ a partir del árbol anterior



Es evidente que la propiedad de ser grande (o no) debe analizarse no sólo para los elementos de la rama superior (T) sino también para los de la rama inferior ($\overline{T}$). Cada vez que se prolonga un árbol con el estudio de un nuevo atributo, debe bifurcarse cada una de las ramas terminales.

5.- Dado el referencial D = $\{$ letras de la palabra "municipalidad" $\}$ y las partes de él:

G = $\{$ vocales $\}$

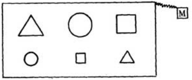
R = $\{$ letras de la palabra "maldad" $\}$

representar los conjuntos en un diagrama de árbol. ¿Qué partes de D quedan individualizadas en las cuatro ramas? ¿Algunas de esas partes es G o R? ¿Por qué?

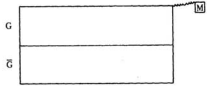
6.- En 1973 hicimos una prueba con niños de primer grado (6 años) con respecto a qué tipo de gráfico, de los que habían usado regularmente en clase, preferían para organizar información suministrada en problemas concretos. Hasta ese momento habían trabajado con árboles, líneas de Euler-Venn y diagramas de Carroll. En un alto porcentaje eligieron estos últimos (que ya fueron usados en el Capítulo I) y que pasamos a describir en detalle.

Lewis Carroll (seudónimo de Charles Lutwidge Dodgson, inglés que vivió en la segunda mitad del siglo XIX, profesor de matemática en la High School de Oxford) es más conocido por sus obras "Alicia en el país de las maravillas" y "A través del espejo" que por su "Tratado elemental de los determinantes" o "El libro V de Euclides tratado de un modo algebraico, en cuanto hace relación a magnitudes conmensurables". En su libro "El juego de la lógica" presenta y analiza los diagramas que ahora conocemos, en su adaptación elemental, como "diagramas de Carroll".

a) Para representar un atributo y su negación, por supuesto dentro de un referencial previamente definido, puede procederse así:
   - se dibuja un rectángulo al cual se le incorporan los elementos del referencial (utilizaremos el ya definido conjunto M);

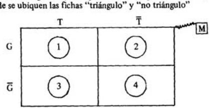


   - si se quiere analizar el atributo "grande" en M, se llegan a determinar, gráficamente, dos regiones, las que corresponden a G y $\bar{G}$



b) A partir de ese diagrama, se pueden seguir trabajando los otros atributos de M; por ejemplo "triángulo" y "no triángulo".

Para representar gráficamente la nueva situación (y sin dejar de lado el atributo "grande" y su negación ya analizados en a) tendremos que, a partir del diagrama anterior, determinar regiones (tanto para las fichas "grandes" como para las "no grandes") donde se ubiquen las fichas "triángulo" y "no triángulo"



c) En el sector 1 estarán las fichas grandes que son triángulos.
En el sector 2 estarán las fichas grandes que no son triángulos.
En el sector 3 estarán las fichas . . . .
En el sector 4 estarán las fichas . . . .

¿Dónde está ubicada la ficha △? ¿Por qué?

¿Dónde está ubicada la ficha ○? ¿Por qué?

¿Dónde está ubicada la ficha □ ? ¿Por qué?

¿Dónde está ubicada la ficha ◁ ? ¿Por qué?

7.- Dados E = {números naturales <17} y los subconjuntos de E

H = {múltiplos de 3}

I = {impares}

representar E, H, $\overline{H}$, I, $\overline{I}$ en un diagrama de Carroll.

8.- Los diagramas de Carroll tienen la ventaja de poder ampliar el análisis en subconjuntos de un referencial dado, sin necesidad de agrandar el esquema. Sea por ejemplo:

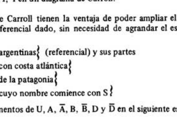
U = {provincias argentinas} (referencial) y sus partes

A = {provincias con costa atlántica}

B = {provincias de la patagonia}

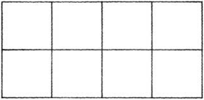
D = {provincias cuyo nombre comience con S}

a) ubicar los elementos de U, A, $\overline{A}$, B, $\overline{B}$, D y $\overline{D}$ en el siguiente esquema:

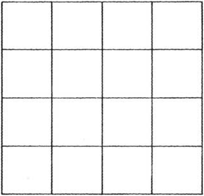


¿Queda algún elemento fuera del rectángulo más grande?
¿Qué elementos están en la región 4? ¿Por qué?
¿Qué elementos están en la región 7? ¿Por qué?
¿Qué propiedad(es) tienen en común los elementos de las regiones 4 y 7?
¿Qué propiedad(es) diferencian a los elementos de las regiones 4 y 7?

b) el siguiente diagrama ¿es adecuado para ubicar los elementos de los conjuntos citados en a)?



9.- Definir un referencial y cuatro subconjuntos de él, que puedan representarse con el siguiente diagrama



Atención: son, ahora, cuatro atributos y sus negaciones los que hacen falta.

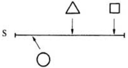
10.- *Diagramas de Keene*

Aquí proponemos otra convención gráfica. Para representar un conjunto, se puede comenzar trazando un segmento e identificándolo con el mismo nombre del conjunto, que se coloca en uno de sus extremos. Por ejemplo:

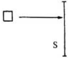
$S = \{ \triangle, \bigcirc, \square \}$

Comenzamos:

Ahora bien, ¿cómo representaremos los elementos de S? De la siguiente manera:



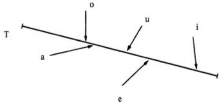
La relación de pertenencia (elemento-conjunto) se representa por una y sólo una flecha en cuyo origen está el elemento y cuya punta está sobre el segmento.



significa "$\square$ pertenece a S"

Todos y cada uno de los elementos del conjunto a representar son origen de una sola flecha que llega al segmento. Llegan al segmento tantas flechas como elementos tiene el conjunto.

Ejemplo: representar en un diagrama de Keene T = $\{$a, e, i, o, u$\}$

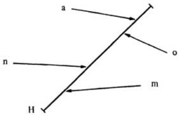


Proponer dos diagramas de Keene que también sean representaciones gráficas de T.

Para la representación gráfica de un conjunto utilizando un diagrama de Keene ¿es importante el orden en que aparecen los elementos? ¿Es importante la posición y la medida del segmento? ¿Es importante conocer la medida de los ángulos que forman las flechas y el segmento?

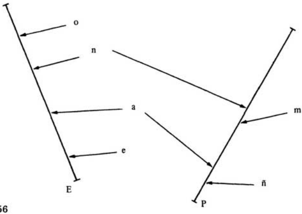
11.- *Ejercicios:*

a) Dado el siguiente diagrama de Keene, escribir por extensión el conjunto al cual representa:



Escribir el conjunto H por comprensión

b) Analizar esta situación gráfica. ¿Puede escribirse por extensión el conjunto E? ¿Y el conjunto P?

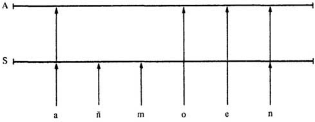


c) Representar mediante diagramas de Keene los siguientes conjuntos:

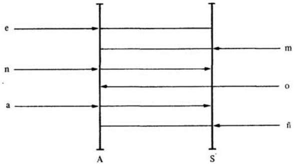
$A = \{ x/x$ es letra de la palabra "enano" $\}$

$S = \{ x/x$ es letra de la palabra "mañana" $\}$

i) Aquí proponemos una posible solución. ¿Es correcta? ¿Por qué?



ii) Y esta propuesta gráfica ¿es correcta? ¿Por qué?



12.- Comparar las palabras "enano" y "mañana". ¿Qué se puede decir después de compararlas?

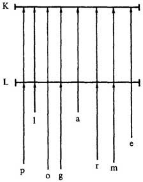
Comparar los conjuntos A y S del ejercicio 11-c. ¿Qué se puede decir de ellos? ¿Tienen los mismos elementos? ¿Tienen **algunos** elementos comunes? La representación gráfica ¿representa la respuesta correcta? ¿Por qué?

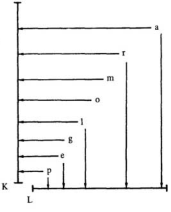
13.- Realizar un diagrama de Euler-Venn para representar los conjuntos A y S del ejercicio 11-c.

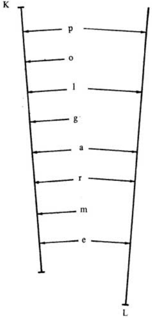
14.- Sean los conjuntos:

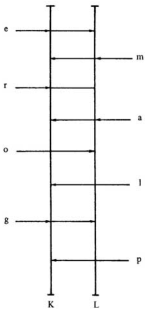
K = {x / x es letra de la palabra "paralelogramo"}
L = {x / x es letra de la palabra "paralela"}

¿Cuál o cuáles de los siguientes diagramas de Keene es o son correctos para representarlos?
Para cada caso: SI, ¿por qué?
NO, ¿por qué?









a) Comparar las palabras "paralelogramo" y "paralela", ¿qué se puede decir?
Comparar los conjuntos K y L. ¿Qué se puede decir? ¿Tienen los mismos elementos? ¿Tienen elementos comunes? ¿Qué relación se puede establecer entre K y L?

Construir un diagrama de Euler-Venn para representar K y L.

15.- Representar por diagramas de Keene los siguientes conjuntos:

$C = \{1, 2, 3\}$
$D = \{x \,/\, x$ es letra de la palabra "aula"$\}$

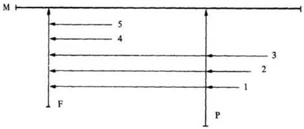
Comparar los conjuntos. ¿Qué puede decirse?

16.- Toda representación gráfica tiene alguna limitación. Esta nueva convención también la tiene, por ejemplo, para representar conjuntos que tienen muchos elementos. Pero es indudable que tiene también sus ventajas. Veamos por qué.

Representar gráficamente:

$M = \{\{1, 2, 3\} ; \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$

Podemos llamar $P = \{1, 2, 3\}$ y $F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Observamos que M es un conjunto de conjuntos, es decir, M es un conjunto cuyos elementos son conjuntos.



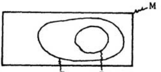
Podemos resumir así la situación:

i) el conjunto M tiene dos elementos, que son el conjunto P y el conjunto F;

ii) todos los elementos de P son elementos de F; luego P está incluído en F;

iii) $1 \in P$ y $P \in M$ pero $1 \notin M$; **¡esto es muy importante!** La relación de pertenencia es no-transitiva.

Teniendo en cuenta estas tres observaciones, tratar de representar el conjunto de conjuntos M en un diagrama de Euler-Venn. ¿Por qué el siguiente esquema no es válido?



Si bien el tipo de ejercicio analizado no es frecuente en el aprendizaje inicial, este hecho no es motivo suficiente para que el docente desconozca las limitaciones de esta convención gráfica. El problema fundamental reside en una distinguibilidad gráfica poco clara, lograda para conceptos distintos como son la pertenencia y la inclusión. Consideramos fundamental una clara distinción de las dos relaciones. Todos los problemas que provoca una mala interpretación de la diferencia existente entre ambas relaciones, sí son del dominio educativo de cualquier nivel.

Los diagramas de Euler-Venn no explicitan gráficamente la diferencia entre pertenencia e inclusión, y ésto puede ser peligroso. ¿Es posible representar el conjunto de conjuntos M en un diagrama de Carroll? ¿Y en un diagrama de árbol?

De los distintos diagramas trabajados ¿cuál es el mejor? Esta pregunta no puede ser respondida en términos generales, y la respuesta tiene connotaciones matemáticas y pedagógicas.

Hemos comprobado la inconveniencia de los diagramas de Keene para representar conjuntos con elevado número de elementos, y la claridad con que en ellos se representan aspectos fundamentales de las relaciones de pertenencia e inclusión. Los diagramas de Euler-Venn no son adecuados para estudiar con precisión la inclusión, pero son prácticos para graficar un referencial y subconjuntos o partes de él, como así también para representar con una línea cerrada conjuntos de número elevado de elementos, sin necesidad de detallar éstos. Los diagramas de árbol son prácticos para reflexionar sobre el análisis ordenado de atributos parciales de los elementos de un referencial o para "construir" el conjunto de partes de un conjunto. Los diagramas de Carroll permiten trabajar muchas variables en espacios reducidos y regulares.

"Creemos útil trabajar con las convenciones gráficas más adecuadas a cada situación. No tiene sentido bloquear al aprendiz con un único tipo de representación gráfica. Una distribución es tan conveniente como cualquier otra, siempre que permita hablar de lo que se ha abstraído, que permita observarlo desde afuera y reflexionar sobre ello".

"Tanto para que puedan manifestarse las diferencias individuales en la formación de los conceptos, como para que los estudiantes vayan adquiriendo el sentido matemático de una abstracción, la misma estructura conceptual deberá ser presentada en tantas formas perceptivas equivalentes como podamos".

Vale la pena reiterar: los medios gráficos deben ser utilizados como soportes representativos de abstracciones ya logradas.

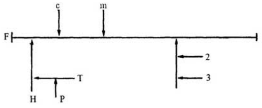
17.- ***Ejercicios:***

a) Representar con diagrama de Keene la siguiente situación:

$E = \Big\{ \{ x \,/\, x \text{ es letra de la palabra "diario"} \} , p, q \Big\}$

¿Cuántos elementos tiene el conjunto E?

b) Dado el siguiente diagrama de Keene, escribir el conjunto F por extensión



c) Tenemos un conjunto E y dos subconjuntos A y B de E:

$E = \{3, 7, a, o, 2, z, x, 1, c, s\}$

$B = \{3, 7, o, x, 1\}$

$A = \{3, a, 2, x\}$

i) hacer la representación gráfica en los cuatro tipos de diagrama;

ii) si existe un tercer conjunto C de E : $C = \{a, x, s\}$

¿cómo se representa a C junto con A y B en cada tipo de diagrama?

Ficha 5 Operaciones entre conjuntos: intersección, unión, diferencia simétrica y diferencia.

1.- Existe cierto paralelismo entre la teoría lógica de los predicados (o lógica de funciones) y la teoría matemática de los conjuntos. Dice Dienes en "Les ensembles et leur logique" que las operaciones entre los atributos corresponden a las operaciones que se pueden realizar entre los conjuntos. Partiendo de un atributo o propiedad, se define un conjunto. Por ejemplo: en el referencial M la propiedad "p": "ser cuadrado" define el subconjunto F de M:

F = {□; □}

Diremos que F es el subconjunto de M **asociado** a la propiedad "p".

Dada la propiedad "q": "ser grande", definir el subconjunto G de M asociado a "q".

2.- Definir el subconjunto de M asociado a la fórmula "$\sim p$". ¿Qué podemos decir de este conjunto?

3.- Consideremos ahora una nueva propiedad surgida de la conjunción de atributos que como ya vimos en el capítulo anterior se escribe: $p \wedge q$; ¿cuál es su conjunto asociado?

Lo indicaremos $F \cap G = \{ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$ que se lee "F *intersección* G".

$F \cap G$ representa al conjunto de los elementos comunes a F y a G.

En general:

Sean A y B dos partes de un universo U. A asociado a la propiedad "p" y B asociado a la propiedad "q". $A \cap B$ es el conjunto asociado a la propiedad "$p \wedge q$".

4.- Continuando con los conjuntos F (asociado a la propiedad "p") y G (asociado a la propiedad "q") del referencial M, definir por extensión el conjunto asociado a la propiedad "p v; q". Al conjunto obtenido lo llamamos "$F \cup G$" que se lee "F unión G". $F \cup G$, evidentemente, es el conjunto cuyos elementos pertenecen a F o (inclusivo) a G.

En general, siendo F y G dos partes de un universo U; F asociado a la propiedad "p" y G asociado a la propiedad "q", $F \cup G$ (F **unido** G) es el conjunto asociado a la propiedad "p v q".

5.- En los mismos conjuntos M, F y G, analicemos la propiedad "p w q". ¿Qué elementos pertenecen al conjunto asociado a la propiedad "p w q"?

El conjunto asociado a la propiedad "p w q" es $F \Delta G$ que se lee "F delta G" y corresponde a la operación conjuntista **diferencia simétrica**. Completar la definición de la operación Δ.

En general, siendo . . . . ; F asociado . . . . y G . . . . , $F \Delta G$ (... diferencia simétrica . . .) es. . . . .

6.- El conjunto asociado a la propiedad "$p \vee \sim q$" es $F \setminus G$ que se lee "F *diferencia* G" y corresponde a la operación conjuntista diferencia ordinaria.

Definir, con sus propias palabras, $F \setminus G$.

7.- Resumiendo:

Lenguaje de las propiedades	p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	p w q	$p \wedge \sim q$	$\sim p$
Lenguaje de los conjuntos	F	G	$F \cap G$	$F \cup G$	$F \Delta G$	$F \setminus G$	$\overline{F}$

8.- Completar el cuadro adjunto, utilizando p; q; ~; ∧; v; w;

Conjunto	Propiedad asociada
$\overline{E} \cap \overline{F}$	~p ..... ~q
$\overline{E} \cup F$	
$E \Delta \overline{F}$	
$E \cap F$	
$\overline{E \cap F}$	
$\overline{E} \cup \overline{F}$	

9.- Sea D = {dígitos} y las propiedades:

r: ser dígito impar
s: ser dígito menor que 3
t: ser dígito comprendido entre 4 y 8

M, N y P son subconjuntos de D asociados a las propiedades r, s y t respectivamente. Definirlos por extensión. Completar el siguiente cuadro con los conjuntos asociados:

Propiedad	Conjunto asociado	Definido por extensión
r ∧ s		
s w t		
~s ∧ t		
~(t ∧ r)		
~tv ~r		
(s ∧ ~t) v (~s ∧ t)		

10.- A partir de propiedades lógicas y su asociación a los conjuntos hemos llegado a definir las operaciones conjuntistas de intersección (∩), unión (∪), diferencia simétrica (Δ) y diferencia ordinaria (\ ).

Es conveniente realizar variados ejercicios con esas operaciones para fijar los conceptos básicos. En la ficha siguiente presentamos algunos ejemplos de distintas operaciones, con el manejo de diferentes representaciones gráficas.

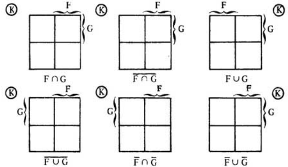
Ficha 6 Ejercicios.

1.- E = {3; □; 7; a; △; 2; x} Sean dos subconjuntos de E:

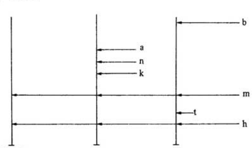
$C = \{3; \square; 2\}$
$D = \{\triangle; 7\}$

a) Dibujar en un diagrama de árbol E y las partes C y D.
b) Una rama del árbol está vacía, ¿cuál? ¿Por qué?
c) Completar $C \cap D; C \cup D; C \setminus D; C \Delta D$.

2.- Observar los siguientes diagramas de Carroll representando cada uno de ellos un conjunto K y dos subconjuntos F y G. En cada diagrama pintar las casillas correspondientes al subconjunto indicado al pie del diagrama. Escribir luego las igualdades entre conjuntos que se observan en estos diagramas. ¿Qué observaciones se pueden hacer?

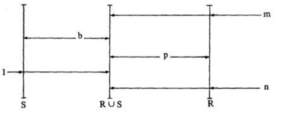


3.- a) El siguiente diagrama de Keene representa la intersección de dos conjuntos F y G:



Escribir por extensión los conjuntos F, G y $F \cap G$.

b) El siguiente diagrama representa $R \cup S$. Definir por extensión los conjuntos R, S y $R \cup S$.



4.- Dos amigos, Emilio y Cipriano, están de vacaciones. Emilio quiere visitar Salta, Tucumán, Córdoba y Mar del Plata. Cipriano quiere visitar Bariloche, Mendoza, Tucumán, Catamarca y Córdoba.

a) Escribir el conjunto G de las ciudades que quieren visitar. ¿Cómo se llama este conjunto? ¿A qué operación corresponde?
b) A los dos les gustaría viajar juntos, pero se dan cuenta que no tendrán tiempo de visitar todas las ciudades. Deciden visitar juntos las ciudades que les interesan a ambos y separarse luego. ¿Qué operación representa el conjunto de ciudades que van a visitar juntos? Definirlo por extensión.
c) ¿Cuál es el conjunto de ciudades que van a visitar separados? Escribirlo por extensión. ¿A qué operación corresponde?
d) Representar estos conjuntos en un diagrama de Venn.

5.- Tomemos como universo una orquesta E. Consideremos las partes siguientes de E:

A, el conjunto de los hombres;
B, el conjunto de las personas casadas;
C, el conjunto de las personas que ejecutan un instrumento de cuerda;
Definir por comprensión las partes siguientes de E:
$\overline{A}$; $\overline{B}$; $\overline{C}$; $A \cap B$; $\overline{B} \cap C$; $\overline{A} \cap \overline{C}$; $A \cup \overline{B}$; $B \cup \overline{C}$; $A \cap B$; $B \cap C$; $A \cup B \cup C$.

Dibujar un diagrama de Carroll y encontrar las zonas correspondientes a los siguientes conjuntos:

- Los hombres solteros que ejecutan un instrumento a cuerdas.
- Las mujeres casadas que ejecutan un instrumento a cuerdas.
- Los solteros que ejecutan el violín.
- Las mujeres no casadas y que ejecutan el violín.

6.- U es el conjunto de personas mayores de edad.
F es el conjunto de los elementos de U que son fumadores.
C es el conjunto de los elementos de U que están casados.
a) Representar U y los subconjuntos F y C en un diagrama de Venn.
b) Dibujar un diagrama para cada conjunto indicar cuál es su atributo, para:
$F \cap C; F \cup C; C \cup \overline{F}; \overline{C} \cap \overline{F}$.

7.- Sea el conjunto F de los números naturales menores que 20, y sus subconjuntos:
A de los naturales mayores que 12.
B de los naturales múltiplos de 3.
C de los naturales impares.
Escribir por extensión:

$A \cap C; A \cap B; B \cap C; A \cup B; A \cup \overline{C}; A \cap \overline{C}; \overline{B} \cap C; \overline{A} \cap \overline{C}$
Señalar en diagramas cada una de las operaciones indicadas precedentemente.
¿Cuál es el atributo de cada uno de los siguientes conjuntos:
$A \cap C; B \cap C; A \cap \overline{C}; A \cup \overline{C}$?

8.- Sea $E = \{b, t, c, p, h, u, m\}$
Buscar los dos subconjuntos A y D de E sabiendo que:
$t \notin A; p \in D$; D tiene dos elementos; $\{t\} \subset D; b \notin A; \overline{A}$ tiene dos elementos.
Dibujar un diagrama que represente E y las partes A y D.
Explicar cómo se llegó a la solución del ejercicio.

Ficha 7 Matemática y lenguaje.

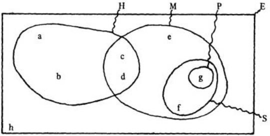
Matemática y lenguaje.

En el desarrollo de nuestro libro hemos transcripto ejercicios extraídos de diferentes textos. En realidad este libro es, en gran medida, una recopilación de ideas de docentes e investigadores de diversas latitudes, que se han dedicado a la matemática para futuros educadores.

Un concepto fundamental en el que insisten muchos autores (Dienes, Glaymann, Mix, Duvert, Héraud, Tellier, Jarente, Gauthier, etc.) es el de la real conexión existente entre la lógica y la teoría de conjuntos. Precisamente ése es el criterio que priva en muchos educadores al planificar la currícula de la escuela elemental, sugiriendo la introducción del niño en esas ramas del saber matemático pero atendiendo, por supuesto, al desarrollo psicogenético de los alumnos de cada ciclo escolar y con una metodología acorde a ese desarrollo.

Aquí presentamos ejercicios que creemos apropiados para ejemplificar y sintetizar no sólo las vinculaciones básicas de la lógica (y en este caso particular los cuantificadores) con parte de la teoría de conjuntos sino también el uso corriente del lenguaje.

1.- Sea un conjunto E = $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$
Escribir por extensión los subconjuntos M, H, P, S.



- c, d, e, f, g, son $\boxed{\text{los}}$ elementos de M (**todos** los elementos de M);
- g es $\boxed{\text{el}}$ elemento de P (es el **único** elemento de P);
- a es $\boxed{\text{un}}$ elemento de H (**uno** de los elementos de H);
- a y b son $\boxed{\text{unos}}$ elementos de H (**algunos** elementos de H);
- P tiene $\boxed{\text{un}}$ elemento (**un** indica aquí el número de elementos de P).

2.- Sea un conjunto T = $\{1, 9, 4\}$
  a) ¿Cuál de las dos frases siguientes es verdadera?:
    - T es el conjunto de las **cifras** arábigas;
    - T es un conjunto de cifras arábigas.
  b) Buscar **un** número natural que se escriba utilizando **unos** elementos de T.
  Buscar **un** natural que se escriba con **los** elementos de T.
  Buscar **los** naturales de tres cifras distintas que se escriban con **los** elementos de T.
  c) ¿ $\{1;9\}$ es **un** subconjunto de T? ¿Es **el** subconjunto de T?
  d) ¿ $\{4\}$ es **una** parte complementaria de $\{1;9\}$ en T?
  e) Completar las siguientes frases con "unos", "un", "los", "elementos" o "elemento":

- El natural 19 se escribe con .... del conjunto T.
- El natural 44 se escribe con .... del conjunto T.
- Los naturales 44; 19; 199 se escriben con .... del conjunto T.
- El natural 1949 se escribe con .... del conjunto T.

3.- Considerar nuevamente el conjunto E del apartado 1 y sus subconjuntos M, H, P y S:

a) P es un subconjunto de M: $P \subset M$

Todo elemento de P es elemento de M (lo que significa que cada elemento de P es elemento de M o bien cualquier elemento de P es elemento de M). De las siguientes frases ¿cuáles son verdaderas?

- Todo elemento de P es elemento de H.
- Ningún elemento de P es elemento de H (P y H son *disjuntos*).
- Ningún elemento de H es elemento de M.

b) La intersección de los conjuntos H y M no es vacía:
$H \cap M \neq \emptyset$

Algunos elementos de H son elementos de M (lo que significa que hay unos elementos de H que son elementos de M y unos elementos de H que no son elementos de M).

De las siguientes frases ¿cuáles son verdaderas?:

- Los conjuntos M y H son disjuntos.
- Ningún elemento de M es elemento de H.
- Algunos elementos de H son elementos de M.

c) La intersección de los conjuntos H y S es vacía:
$H \cap S = \emptyset$
Ningún elemento de H es elemento de S.

De las siguientes frases ¿cuáles son verdaderas?:

- H y S no tienen ningún elemento en común.
- H y S son disjuntos.
- Ningún elemento de S es elemento de H.

4.- En la casilla de la izquierda del cuadro de página siguiente se ha dibujado el diagrama de Venn de un conjunto G y de los subconjuntos L y J. Completar las demás casillas sabiendo que todas las frases (en matemática y en castellano) son verdaderas

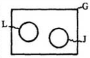
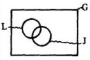
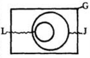
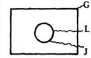
5.- E representa el conjunto de los alumnos de una clase mixta.
V representa el subconjunto de los varones.
A representa el subconjunto de alumnos de la clase que usan anteojos; A no es vacío.
L es el subconjunto de los alumnos cuyo nombre empieza con la letra L.

a) Se dan las siguientes aclaraciones:
Ningún varón usa anteojos.
El nombre de algunos varones empieza con L.
Ningún alumno que usa anteojos tiene un nombre que empiece con L.
¿Cómo se traduce cada una de estas frases en matemática?

b) Representar los conjuntos E, A, V y L mediante un diagrama, teniendo en cuenta las aclaraciones hechas en a).

c) De las siguientes frases ¿cuáles son verdaderas?:

- Ninguna mujer usa anteojos.
- El alumno Luis no usa anteojos.
- Juan usa anteojos.
- Laura usa anteojos.

	$L \cap J =$	.... son disjuntos. .... elemento de L no es elemento de J.
	$L \cap J \neq \emptyset$ $L \cap J$ ....L L.....$J \neq J$	Hay al menos un elemento de L que es.......... L y J no son .... Hay ...... un elemento de L que no es elemento de J.
	L....J $L \neq$ J	.... elemento de L es elemento de J. Hay al menos un elemento de..... que no es elemento de ......
	L = J	Todo elemento de L.......... y......... es elemento de L.

6.- Observando el diagrama adjunto definir los siguientes subconjuntos de F:

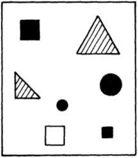
R es el conjunto de las figuras redondas.

C es el conjunto de las figuras cuadradas.

T es el conjunto de las figuras triangulares.

D es el conjunto de las figuras rayadas.

G es el conjunto de las figuras negras.



¿Qué inclusiones pueden escribirse entre los subconjuntos R, C, T, D, G y F?
De las frases siguientes ¿cuáles son verdaderas?:
- Toda figura negra es redonda.
- Toda figura redonda es negra.
- Ninguna figura cuadrada es redonda.
- Ninguna figura cuadrada es negra.
- Toda figura triangular es rayada.
- Ninguna figura rayada es cuadrada.

7.- En un club se practica fútbol, básquet y tenis. Llamaremos F al conjunto de futbolistas, B al conjunto de basquetbolistas y T al conjunto de los que juegan tenis.
a) Utilizando $\emptyset$; $\cap$; $\subset$; $=$; $\neq$; traducir al lenguaje matemático las siguientes frases del siguiente cuadro:

Frases en castellano	Traducción matemática
Todo futbolista practica tenis.	
Ningún basquetbolista es futbolista.	
Algunos basquetbolistas practican tenis.	
Hay al menos un basquetbolista que juega al fútbol.	
Todo basquetbolista practica tenis.	
Hay al menos una persona que practica tenis y basquet.	

b) C es el conjunto de todos los miembros del club.
Dibujar el diagrama de Venn de C y sus subconjuntos B, T y F, sabiendo que las tres primeras frases son verdaderas.
¿La cuarta frase es verdadera?
La misma pregunta para la quinta y sexta frases.
c) Dibujar el diagrama de Venn, admitiendo ahora que las tres últimas frases son verdaderas. ¿Se puede decir si la primera frase es verdadera o falsa? ¿La segunda frase es verdadera? La misma pregunta para la tercera frase.

8.- Un estacionamiento tiene capacidad para 260 vehículos. Esa cantidad incluye estacionamientos cubiertos y otros al aire libre. La contratación puede hacerse mensual o fraccionada.
Se desea saber el movimiento en un mes conociendo los siguientes datos:
- 25 de las cocheras mensuales son cubiertas.

– Las cocheras cubiertas o mensuales son 103.
– Las cocheras no cubiertas son 192.
– a) ¿Cuántas cocheras cubiertas no son mensuales?
– b) ¿Cuántas cocheras no cubiertas son mensuales?
– c) ¿Cuántas cocheras no mensuales están al aire libre?

9.- U es una parte del abecedario:

$U = \{ a, b, c, d, e, g, h, i, j, p, o, r \}$

A, B, C son tres subconjuntos de U definidos en el siguiente cuadro. Completar:

Nombre del conjunto	Conjunto escrito por extensión	Propiedad asociada al conjunto	Simbolización de la propiedad
A	$\{a; e; i; o\}$	ser vocal	r
B		ser una letra de la palabra "roja"	p
C		ser una letra de la palabra "bodega"	q
			$\sim r$
			$r \wedge p$
			$\sim q \vee p$
$B \triangle A$			
		ser una consonante de la palabra "roja"	

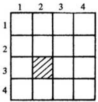
Ficha 8 **Producto cartesiano.**

a) $T = \{5; 9\}$
$C = \{9; 5\}$
¿T = C? ¿Por qué?
T y C son conjuntos pares, porque son conjuntos de dos elementos.

b) Ernesto fue al cine y eligió la ubicación (5;9).
Teresa fue al cine y eligió la ubicación (9;5).
¿Les corresponde la misma ubicación?
Hay situaciones en las cuales el orden en que se expresan los datos es fundamental. En el ejemplo precedente hemos empleado los **pares ordenados** (5; 9) y (9;5), que no son iguales.

RECORDEMOS:

$\{5;9\} = \{9;5\}$ conjuntos pares (encerrados entre llaves).
$(5;9) \neq (9;5)$ pares ordenados (encerrados entre paréntesis).
En (5; 9), 5 es la primera componente del par ordenado; 9 es la segunda componente del par ordenado.
c) Cada cuadradito del casillero puede individualizarse por un par ordenado del cual (por convención) la primera componente identifica la columna y la segunda la fila. Así, el cuadrito rayado es (2;3).



Pintar los cuadraditos (1;4); (4;2); (3;3).
Todos los cuadrados identificados por un par ordenado de términos iguales ¿en qué sector del casillero se ubican?

d) Sean: $G = \{5;6\}$ y $H = \{\square ; \bigcirc ; \bigtriangledown\}$
Formar todos los pares ordenados (a; b) tales que:
$a \in G$ (a representa al primer elemento del par)
$b \in H$ (b representa al segundo elemento del par)

> El conjunto de todos los pares ordenados (a; b) tales que $a \in G$ y $b \in H$, es el ***producto cartesiano*** de G por H, que se expresa:
> $G \times H = \{(a;b) \;/\; a \in G, b \in H\}$

e) Los organizadores de un torneo de fútbol deciden que todos los equipos participantes jueguen entre sí. Si el conjunto de equipos es A = { Boca Juniors, River Plate, Talleres de Córdoba, Deportivo Roca }, el producto cartesiano A X A ¿les da la nómina de partidos a jugar? ¿Por qué?

f) Las fichas de un juego común de dominó con sectores de 0 a 6 puntos, son fichas formadas por dos sectores de elementos del conjunto D:

D = {  }

El conjunto de fichas del dominó ¿es el producto cartesiano de D X D? ¿Por qué?

3

Relaciones

En "Travaux practiques de mathématique. Série II" Duvert, Gauthier y Glaymann dicen: "Si el estudio de los conjuntos se limitara a describir conjuntos aislados unos de otros, sin relación entre ellos, ese estudio sería una anatomía sin gran interés. Las relaciones introducen una especie de fisiología".

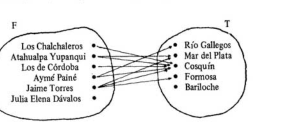
Ficha 1 Elementos de una relación. Relación inversa.

1.- Un empresario de espectáculos organizó la actividad de sus artistas en el interior del país de la siguiente manera:

- Los Chalchaleros actuarán en Cosquín.
- Atahualpa Yupanqui actuará en Cosquín y Mar del Plata.
- Los de Córdoba actuarán en Cosquín.
- Aymé Painé actuará en Cosquín y Río Gallegos.
- Jaime Torres actuará en Mar del Plata, Cosquín y Formosa.
- Julia Elena Dávalos no actuará en el período programado.

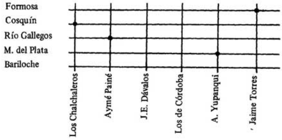
Hemos **relacionado** un conjunto de artistas F con un conjunto de ciudades argentinas T, mediante la expresión "actuará en".

2.- De los gráficos que podrían utilizarse para resumir la información anterior se puede elegir el siguiente, que se llama **esquema sagital**.



3.- El ejemplo del apartado 1, graficado en el apartado 2, es la relación R, "actuará en", que tiene como **conjunto de partida** a F, como **conjunto de llegada** a T.

4.- Otra forma de representar gráficamente una relación es el **esquema cartesiano**. Por convención se ubican los elementos del conjunto de partida en el eje horizontal y los del conjunto de llegada en el eje vertical.



Los puntos destacados de la intersección de una línea horizontal con una vertical, representan los pares ordenados de la relación. Por ejemplo, hay un punto que indica la oración "Los Chalchaleros actuarán en Cosquín".

Completar el esquema cartesiano precedente, marcando los puntos que restan en la representación de la relación.

5.- La oración "Los Chalchaleros actuarán en Cosquín" puede indicarse también de la siguiente manera:

Los Chalchaleros R Cosquín.

donde R simboliza "actuarán en". Los Chalchaleros (elemento del conjunto de partida) es **antecedente** de Cosquín por R. Cosquín es **imagen** de Los Chalchaleros por R.

¿Cuáles son los antecedentes de Cosquín?

¿Cuáles son las imágenes de Los Chalchaleros?

¿Y las de Jaime Torres?

¿A qué conjunto pertenece un antecedente? ¿Todo elemento de este conjunto es un antecedente?

¿A qué conjunto pertenece una imagen? ¿Todo elemento de este conjunto es una imagen?

En resumen:

a R b es una oración en la cual: el verbo está en R el sujeto **a** es antecedente de **b** el complemento **b** es imagen de **a**

6.- Dado P = { blusa, lámpara, libro, rosa } :

a) representar, en un esquema cartesiano, P X P;

b) marcar con color los puntos del esquema que cumplen la relación F definida en P:

F: "está antes en el orden alfabético que";

c) ¿cuántas imágenes tiene "lámpara" por F?

¿"lámpara" es imagen de qué antecedentes?

¿Hay pares ordenados con elementos iguales? ¿Por qué?

d) Hacer el esquema sagital de F en P (atención: partida y llegada es el mismo conjunto).

¿Es imprescindible usar dos diagramas de Venn?

e) ¿Es verdadero o falso: F ⊂ P X P? Justificar la respuesta.

7.- Sea la relación G de S hacia T:

"es el participio de"

S = { jugando, frito, hecho, pintado }

T = { temer, pintar, hacer, freír, echar }

a) Definir por extensión el conjunto de pares ordenados que satisfacen la relación.

b) ¿Hay elementos de S que tienen más de una imagen?

¿Hay elementos de T que tienen más de un antecedente?

c) Expresar la relación G' de T hacia S definida por el siguiente conjunto de pares:

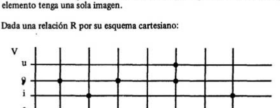
{ (pintar; pintado); (hacer; hecho); (freír; frito);. . . . . }

G' es la relación inversa de G.

8.- Tomando como partida el conjunto F de las mujeres, como llegada el conjunto H de los hombres; buscar una relación (de parentezco) de F hacia H de tal manera que todo elemento de H tenga un solo antecedente.

Con los mismos conjuntos buscar otra relación, siempre de F hacia H, tal que todo elemento tenga una sola imagen.

9.- Dada una relación R por su esquema cartesiano:



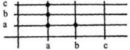
Buscar el esquema sagital. ¿Cuáles son los antecendentes de u? ¿Cuáles son las imágenes de 5? Traducir las respuestas por frases simbólicas utilizando la letra R.

10. Inventar otros ejercicios análogos.

Para definir una relación se debe precisar:
- la partida
- la llegada
- un esquema (sagital o cartesiano) o el conjunto de pares ordenados.

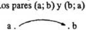
Ficha 2 Elemento bucleado: pares: inerte, boomerang y unilateral.

1.- Sea la relación R en $T = \{a, b, c\}$ definida por el siguiente esquema cartesiano:

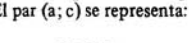


El par (a; a) se representa en un esquema sagital de la siguiente manera:

Se dice que **a** es un elemento **bucleado.**
Los pares (a; b) y (b; a) se representan:



Este es un **par boomerang.**
El par (a; c) se representa:



Atención: en el ejemplo de este apartado, c R a es falso; el par (a; c) es **unilateral.**

¿c R b es verdadero? Cuando dos elementos de T no están relacionados tenemos un **par inerte.**

2.- Teniendo en cuenta T y la relación R del apartado anterior:
a) Encontrar todos los elementos bucleados de T por R.
b) ¿Hay otros pares boomerangs en T por la relación R? ¿Y unilaterales?
c) ¿Cuántos pares inertes hay en T por la relación R?

3.- Resumiendo:

Para una relación **en un mismo conjunto:**
elemento bucleado:
par inerte:
par boomerang:
par unilateral:

4.- De la relación vista en III.1.6., identificar los elementos bucleados, los pares boomerang, inertes y unilaterales.

5.- Para cada una de las siguientes relaciones, decir si tienen elementos bucleados, pares boomerangs y pares unilaterales:

a) "tiene un divisor común con" en $E = \{x, x \in N / 12 < x \leqslant 21\}$

b) "está incluído en" en el conjunto de partes del conjunto $J = \{m; n; p\}$.

c) "tiene la misma forma que" en M.

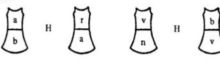
d) "es paralela a" en $\{$rectas del espacio$\}$.

e) "es perpendicular a" en $\{$rectas del plano$\}$.

6.- Sea E el conjunto de muñecas vestidas como muestran los dibujos siguientes:

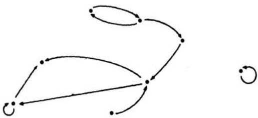
Estudiemos en E la relación H "el color de la blusa de x coincide con el color de la pollera de y".

Ejemplos:



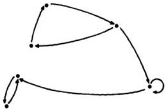
Dibujar el esquema sagital completo. ¿Cuáles son los elementos bucleados? ¿Cuáles son los pares boomerangs? Dar ejemplos de pares inertes y de pares unilaterales.

7.- a) Un equipo de alumnos del Profesorado de Enseñanza Primaria de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional del Comahue, hizo el siguiente esquema en 1978, utilizando otro conjunto de muñecas y la misma relación H.

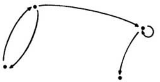


¿Cómo estaban vestidas las muñecas que emplearon esos alumnos?

b) Siguiendo con el juego, otro equipo presentó el siguiente esquema sagital, pero . . . provocó la burla de sus compañeros ¿por qué?



c) Un tercer equipo abandonó el trabajo (esperamos que el lector no haga lo mismo) y dejó su esquema así:

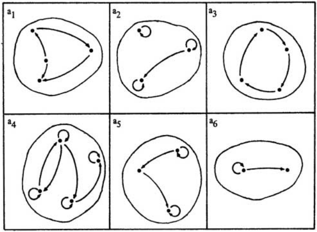


Completarlo sin suprimir flechas y justificando las que se incorporen.

Ficha 3 Propiedades de las relaciones en un mismo conjunto.

En la ficha anterior analizamos las posibilidades de relación de elementos de un mismo conjunto, para un elemento (bucleado o no bucleado) y para dos elementos (par inerte, par boomerang y par unilateral).

1.- Estudiemos ahora qué casos pueden encontrarse al analizar una **relación de elementos en un mismo conjunto**, en cuanto a los elementos bucleados:
dados los esquemas sagitales siguientes:



clasificarlos teniendo en cuenta los elementos bucleados.

Hay muchas clasificaciones posibles. Realizar algunas de ellas. (No olvidar que la matemática es una ciencia, y por lo tanto presenta innumerables posibilidades de plantearse hipótesis y luego tratar de verificarlas; que en esas demostraciones juega un rol importante la lógica; que en lógica estudiamos en I.7.4. los cuantificadores . . .).

¿En los seis esquemas **todos** los elementos son bucleados? ¿**No existen** bucleados? ¿Hay **algunos** bucleados?

Una relación P en T ***es reflexiva*** si para P **todos** los elementos son bucleados.

Una relación P en T ***es antirreflexiva*** si para P **ningún** elemento de T es bucleado.

Teniendo en cuenta las propiedades reflexiva y antirreflexiva, completar:

a_1 es ....

a_2 es ....

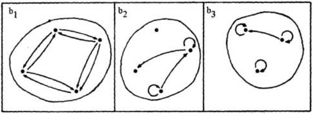
a_3 es ....

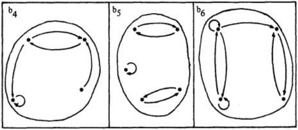
¿a_4 es reflexiva? ¿Es antirreflexiva? ¿Y a_5? ¿Y a_6?

En las relaciones a_4, a_5 y a_6 algunos elementos son bucleados, otros no lo son. Esas relaciones no son reflexivas ni antirreflexivas.

2.- Analicemos ahora qué casos pueden presentarse al estudiar los pares de elementos (boomerangs, unilaterales, inertes) de una **relación de elementos en un mismo conjunto:**

dados los esquemas sagitales siguientes, clasificarlos **teniendo en cuenta los pares de elementos.**





¿Todos los pares son boomerangs? ¿Ningún par es boomerang? ¿Todos los pares son unilaterales? ¿Ningún par es unilateral?

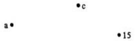
Una relación en un conjunto es una ***relación simétrica***, si y sólo si ella no comprende ningún par unilateral.

Una relación en un conjunto es una ***relación antisimétrica***, si y sólo si ella no comprende ningún par boomerang.

De las relaciones estudiadas en este apartado, ¿cuáles son simétricas? ¿Cuáles son antisimétricas? ¿Cómo son las relaciones b_4 y b_6?

3.- En la ficha III.2.1. vimos las posibilidades de relación de uno y dos elementos en un mismo conjunto. Veremos ahora que existen relaciones en las cuales están vinculadas ternas de elementos, por ejemplo:

Analicemos en N la relación M "es menor que" y consideremos un número, por ejemplo 15. ¿Cuáles son sus antecedentes? ¿Y sus imágenes? Si **a** es un antecedente de 15 y **c** una imagen de 15 ¿qué se puede decir de **a** y **c**? Dibujar las flechas correspondientes:



a M 15 ¿es verdadera?
15 M c ¿es verdadera?
¿Qué se deduce de ello? Diremos que M es transitiva.

En general:

> Una relación R en un mismo conjunto es ***transitiva*** si para toda terna de elementos a, b, c de ese conjunto, si a R b es verdadera y b R c es verdadera, entonces a R c es verdadera.

¿Cuáles de las relaciones de la ficha 2, apartado 5 son transitivas?

4.- *Ejercicios:*

a) Sea la relación A "es múltiplo de", en el conjunto N de números naturales:
   - dar todas las imágenes de 12;
   - ¿cuántos antecedentes tiene 3? Nombrar por lo menos uno de ellos;
   - ¿hay elementos bucleados?
   - ¿Es reflexiva? ¿Es antirreflexiva?
   - 8 A 4 ¿es verdadero?
   - 4 A 8 ¿es verdadero?
   - ¿Es simétrica? ¿Por qué?
   - ¿Es transitiva?

Nota: Precisar el concepto de múltiplo.
   - ¿Cuál es la relación A', inversa de A?

b) Sea la relación B "está más lejos de Rosario que" en el conjunto de poblaciones argentinas:
   - Paraná B Cañada de Gómez ¿es verdadero?
   - Dar tres imágenes de Corrientes por B.
   - ¿Existen elementos bucleados?
   - La Rioja B Córdoba. ¿Córdoba B La Rioja?
   - ¿Hay pares inertes por B?
   - ¿Todos los pares son unilaterales?
   - ¿Qué propiedades tiene B?
   - ¿B tiene inversa?

c) Sea la rela ción C "no tiene elementos en común con" definida en el conjunto de partes de J = $\{ m; n; p \}$
   - hacer un esquema sagital o cartesiano.
   - ¿Qué propiedades tiene C?
   - Definir C' inversa de C ¿qué se observa?

5.- Resumamos el estudio hecho para algunas relaciones en este capítulo III, aclarando para cada una si es reflexiva (R), antirreflexiva (AR), simétrica (S), antisimétrica (AS), y/o transitiva (T):

	UNIVERSO	RELACION	R	AR	S	AS	T
1	$E = \{x \in N/12 < x \leqslant 21\}$	"tiene un divisor común con"					
2	partes de J $J = \{m; n; p\}$	"está incluído en"					
3	M	"tiene la misma forma que"					
4	{rectas del espacio}	"es paralela a"					
5	{rectas del plano}	"es perpendicular a"					
6	E = {conjunto de vestidos}	"el color de la blusa de x coincide con el color de la pollera de y"					
7	{blusa, ...}	"está antes en el orden alfabético que"					
8	N	"es múltiplo de"					
9	{poblaciones argentinas}	"está más lejos de Rosario que"					
10	partes de J $J = \{m; n; p\}$	"no tiene elementos en común con"					

a) ¿Qué relaciones son a la vez reflexivas, simétricas y transitivas?
b) ¿Cuáles son a la vez reflexivas, antisimétricas y transitivas?
c) Inventar, empleando esquemas sagitales, relaciones que sean a la vez:
   - transitivas, reflexivas y no simétricas;
   - transitivas, simétricas y no reflexivas;
   - simétricas, reflexivas y no transitivas.

Ficha 4 Relaciones de equivalencia y de orden. Partición.

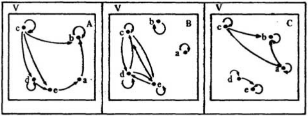
En las fichas precedentes de este capítulo hemos trabajado nociones importantes de las relaciones entre conjuntos y en un mismo conjunto, especialmente las que nos han permitido aclarar algo sobre las relaciones en un mismo conjunto.

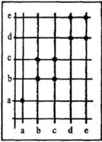
Ya expresamos en la introducción de este tomo I que no nos guía el propósito de presentar un texto matemático (los hay muy buenos y mencionamos a menudo las referencias orientadoras para el lector).

Después de esta observación reiterativa de nuestro objetivo, volvemos a las propiedades de las relaciones, para tratar contenidos fundamentales de la currícula de la escuela primaria argentina: relaciones de equivalencia y relaciones de orden.

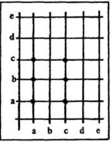
1.- Estudiemos las siguientes relaciones definidas en el conjunto

$V = \{a; b; c; d; e\}$





$\{(a;a), (a;b), (a;c)$
$(b;b), (b;c), (b;d),$
$(c;c), (c;d), (e;d),$
$(e;e)\}$



Completar el siguiente cuadro de las relaciones anteriores, contestando "sí" o "no":

	A	B	C	D	E	F
¿La relación es reflexiva?						
¿La relación es simétrica?						
¿La relación es antisimétrica?						
¿La relación es transitiva?						
¿La relación es a la vez simétrica, reflexiva y transitiva?						
¿La relación es a la vez reflexiva, antisimétrica y transitiva?						

> Una relación en un mismo conjunto, que sea a la vez reflexiva, simétrica y transitiva, se llama ***relación de equivalencia.***

> Una relación en un mismo conjunto, que sea a la vez reflexiva, antisimétrica y transitiva, se llama ***relación de orden.***

2.- Entre las relaciones del apartado precedente, ¿cuáles son relaciones de equivalencia? ¿Cuáles son relaciones de orden?

De las relaciones citadas en III.3.5. ¿cuáles son relaciones de equivalencia? ¿Cuáles son relaciones de orden?

3.- Sea en M la relación T "tiene el mismo tamaño que". ¿Es una relación de equivalencia? ¿Por qué? Hacer el esquema sagital.

¿Qué elementos de M están en relación T con □?

Diremos que estos elementos pertenecen a la misma **clase de equivalencia** que □

Tomar otro elemento cualquiera de M, por ejemplo △ ¿qué elementos de M son sus equivalentes por T? La misma pregunta para ○, ◯, △

En M por T hay dos clases de equivalencia:

$S = \{x, x \in M \, / \, x \text{ es pequeño}\}$

$G = \{y, y \in M \, / \, y \text{ es grande}\}$

Resolver:
S ∪ G = ...
S ∩ G = ...

Una relación de equivalencia determina una **partición** en un conjunto.

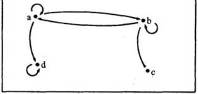
> Un conjunto de partes no vacías de un universo U es ***una partición*** de U si:
> a) esas partes son dos a dos disjuntas;
> b) la unión de ellas es igual a U.

4.- *Ejercicios:*

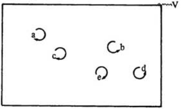
a) Las relaciones siguientes ¿son relaciones de equivalencia?
En caso afirmativo, encontrar las clases de equivalencia:
- en el conjunto de argentinos:
  "... ha nacido el mismo año que ..."
- en el conjunto de argentinos:
  "... habita la misma ciudad que ..."
- en N:
  "... tiene la misma cifra de unidades que ..."
- en el conjunto de ciudades argentinas:
  "... está situada en la misma ruta que ..."

b) En el conjunto de los nombres $\{$ Beto, Claudio, Andrés, Diego, Daniel, Beatriz, Alfredo, Delia, Antonio $\}$ la relación " ... tiene la misma inicial que..." es una relación de equivalencia, ¿por qué?
Representar el conjunto por un rectángulo y dibujar la partición.
¿Cuáles son las clases de equivalencia?

c) Sea el esquema sagital siguiente. Modificarlo (por dos agregados y una supresión) de manera que se obtenga el esquema sagital de una relación de orden.



d) El esquema sagital siguiente presenta la relación R en V.



¿Es reflexiva? ¿Es transitiva? ¿Es antisimétrica? ¿Por qué?
Atención: la relación en V ¿presenta pares boomerangs?
la relación en V ¿presenta pares unilaterales?
Dos últimas preguntas con respecto a esta curiosa relación en V: ¿es una relación de equivalencia? ¿Es una relación de orden?

5.- a) Al estudiar las posibles relaciones entre las cartas de un mazo de barajas españolas ¿se encuentra alguna relación de equivalencia? ¿Cuál? ¿Qué clases de equivalencia determina la partición obtenida?

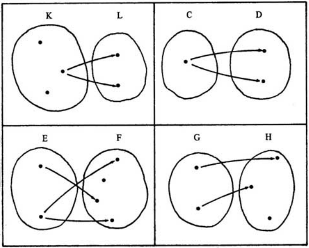
b) Saque de su billetera los billetes que posea (esperamos que este ejercicio no lo resuelva a fin de mes). Clasifíquelos según su valor. ¿Las partes obtenidas son una partición del conjunto de sus billetes? ¿Qué clases de equivalencia obtuvo? Verifique con los billetes en la mano si se cumplen las propiedades de una relación de equivalencia.

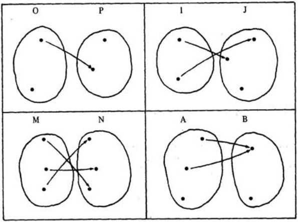
Estos últimos ejemplos los citamos para mostrar muy fugazmente, que los conceptos matemáticos están más inmersos en la vida diaria de lo que habitualmente creemos. Además, un objetivo que figura en gran porcentaje de planificaciones escolares ("matematizar situaciones de la vida diaria") no es tan difícil de instrumentar en la organización de actividades para el aula.

4 Funciones

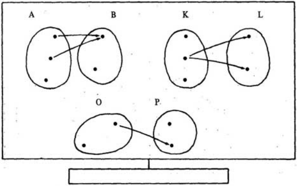
Ficha 1 Relación funcional.

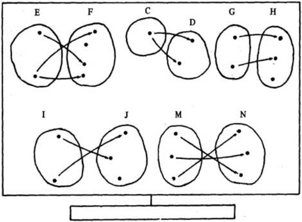
1.- Aquí tenemos algunos esquemas sagitales de relaciones. No conocemos explícitamente la relación que cada uno de ellos representa, sin embargo existe la posibilidad de clasificarlos ¿Qué criterios se pueden utilizar?



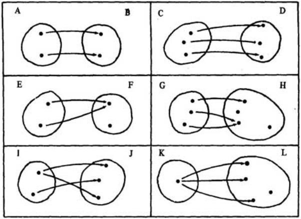


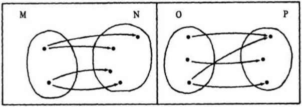
2.- Observar la siguiente clasificación y escribir en los recuadros en blanco la propiedad que permitió realizarla:





3.- A continuación clasificar los siguientes esquemas sagitales:





En todos ellos se verifica que "de **todos** los elementos del conjunto de partida salen flechas".

4.- Haremos un pequeño intermedio para detenernos en un concepto matemático muy usado y a menudo poco comprendido.

a) Si Juan afirma que llevará a cenar a su casa a por lo menos tres amigos y a lo sumo cinco:

Analizar cuál de las siguientes situaciones responden a las condiciones impuestas y cuáles no. Si se ha violado alguna condición impuesta, decir cuál es y por qué.

- Juan concurre a la cena con dos amigos.
- Juan concurre a la cena con siete amigos.
- Juan concurre a la cena con cuatro amigos.
- Juan concurre a la cena con tres amigos.
- Juan concurre a la cena solo.

b) Pedro afirma que tiene 22 años.

- Si tiene 22 años ¿tiene por lo menos 15 años?
- Afirmar: "tengo 22 años" ¿significa "tengo a lo sumo 22 años"?

c) José dice "en mi mano derecha tengo un dedo".

- Si tiene cinco dedos ¿es incorrecta su afirmación?

d) Le dice la maestra a Joaquín: "múestrame un dedo de tu mano izquierda". El niño le muestra la mano abierta con sus cinco dedos ¿es incorrecta la respuesta?

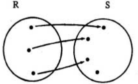
e) "Por lo menos" significa existencia, ¿es condición de mínimo o de máximo?

f) "A lo sumo" ¿es condición de mínimo o de máximo?

5.- Teniendo en cuenta lo anterior, tratar de responder estas dos preguntas para cada uno de los gráficos siguientes:

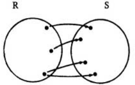
a): de todos los elementos de R ¿sale por lo menos una flecha?

b): de **todos** los elementos de R ¿sale a lo sumo una flecha?



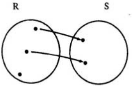
a)

b)



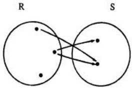
a)

b)



a)

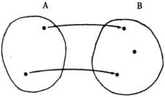
b)



a)

b)

6.- ¿Cómo explicaría **la salida** de flechas en el gráfico siguiente?



De todo elemento de A sale .... una flecha y .... una flecha.
Podríamos decir: de todo elemento de A sale una y sólo una flecha.

7.- Volviendo al apartado 3 de esta ficha ¿para cuáles de los gráficos se cumple la propiedad enunciada en 6?
Dichos gráficos representan funciones.

Una relación de A hacia B tal que **todo** elemento de A tenga **una y sólo una** imagen, es llamada ***relación funcional*** o ***función.***

8.- Sea una relación funcional f de S hacia B y consideremos en ella un elemento **a** de S con imagen única. La imagen de **a** por f se escribe:

f (a)

Esta forma de esc ibir se llama notación funcional. En efecto, ella no sirve para una relación no funcional, porque el símbolo "f (a)" podría designar a muchos elementos de la llegada. Para expresar que "b es la imagen de a por la función f", se escribe:

$b = f(a)$ o también $f: a \to b$

9.- *Ejercicios:*

a) Dados un conjunto E de personas y un conjunto K de los apellidos de esas personas:

i) La relación "tiene como apellido" de E hacia K ¿es una función? ¿Por qué?

ii) Si R es la relación "es el apellido de" de K hacia E, ¿en qué casos R no es una función de K a E?

b) E es el conjunto de alumnas de la clase, M el conjunto de los doce meses del año. R es la relación de E en M "nació en el mes de". Sin dibujar el esquema ¿se puede decir si esta relación es una función?

c) Pedro, Juan, Silvia, Mario y Luis son alumnos de una escuela. Representaremos a cada niño por la inicial de su nombre. Pedro, Juan y Mario estudian inglés; Silvia estudia alemán; Mario y Luis estudian francés.

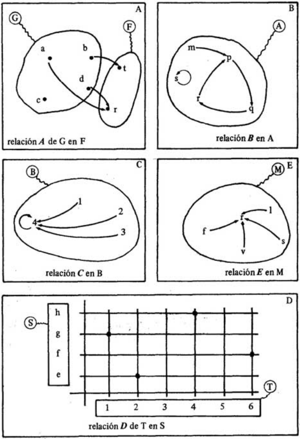
i) R es la relación "estudia".
Analizar la relación R de origen $\{P; J; S; M; L\}$ de conjunto de llegada $\{$inglés; francés; alemán$\}$

¿R es función? ¿Por qué?

ii) T es la relación "estudia" de origen $\{P; J; L; S\}$ y de llegada $\{$inglés; francés; alemán$\}$

¿T es función? Explicar la respuesta:

10.- a) Los siguientes esquemas representan diferentes relaciones.
Estudiarlos y determinar cuáles de esas relaciones son funcionales:



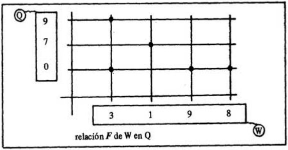
relación *A* de G en F

relación *B* en A

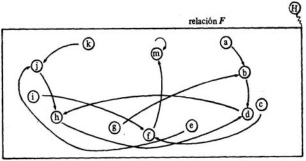
relación *C* en B

relación *E* en M

relación *D* de T en S



b) Dibujar el esquema cartesiano de la relación F en H representada en el siguiente esquema sagital:



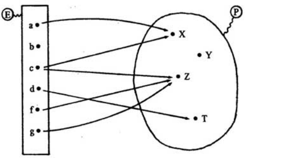
¿F es relación funcional? Explicar por qué.

c) $E = \{a; b; c; d; f; g\}$

P es un conjunto de partes de E:

$P = \{X; Y; Z; T\}$

El esquema sagital siguiente representa la relación F "es elemento de" de E hacia P



i) Escribir X, Y, Z y T por extensión, así como: $X \cap Z$; $Z \cap T$; $T \cap X$; $X \cup T$; $Y \Delta T$ y $Z \Delta T$.
ii) La relación F ¿es función? ¿por qué?
iii) ¿Es P una partición del conjunto E? ¿Por qué?

11.- a) Considerar el siguiente "molde":

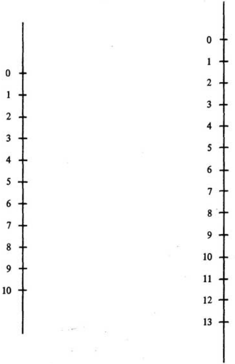
$f : \square \rightarrow \square + 2$

Si se reemplaza $\square$ por el natural 3 se obtiene:
$f : 3 \rightarrow 3 + 2$

Si se sustituye $\square$ por el natural 10 se obtiene:
$f : 10 \rightarrow 10 + 2$

Si se reemplaza $\square$ por un natural cualquiera, siempre se obtiene una frase verdadera.

Este "molde" define una función de N en N, que se expresa:
$f : x \rightarrow x + 2$
i) Trazar algunas flechas del esquema sagital de f en el dibujo que sigue:

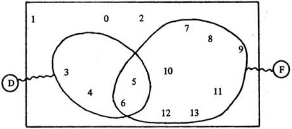


ii) La relación f ', inversa de f ¿es función? ¿Por qué?

b) El conjunto **B** = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12} **es la llegada de la relación *P*** "tiene por triple". Sabiendo que el conjunto de partida A tiene cuatro elementos y que *P* es una función de A hacia B, determinar los elementos de A. Dibujar un esquema (sagital o cartesiano) de la relación *P*.

c) Si x designa a un natural, el doble de x será designado 2x.

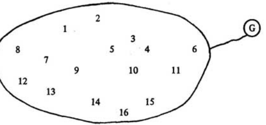
i) Dibujar el esquema sagital de la función h.
h: x → 2x de origen en D y final en F



ii) Dibujar el esquema cartesiano de h.

d) Si x designa a un natural, y al doble de x le restamos 3, el resultado se designa por 2x - 3.

i) Dibujar los esquemas sagital y cartesiano de k:
k: $x \to 2x - 3$
(k está definida en el conjunto G).



ii) En otro dibujo representar el esquema sagital de:
j: $x \to 3x - 4$ (en G)

iii) ¿Son k y j funciones en G?

e) Para calcular el perímetro de un cuadrado se multiplica por 4 la medida de su lado. Si esta medida es un número natural se define una función de N en N que se escribe:

$$f: \begin{cases} N \to N \\ m \to 4.m \end{cases}$$

Completar la tabla:

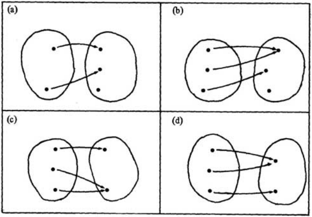
Perímetro del cuadrado de lado m	4 . m
Perímetro del pentágono regular de lado z	....
Perímetro del octógono regular de lado k	....
Superficie del cuadrado de lado x	....
Volumen del cubo de arista j	....

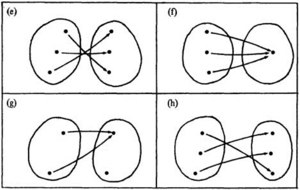
Se pueden definir ahora cinco funciones en N:

$N \to N$	$N \to N$	$N \to N$	$N \to N$	$N \to N$
$f{:}\ m \to 4m$	$d{:}\ z \to \ldots$	$q{:} \ldots \to \ldots$	$p{:}\ \ldots \to \ldots$	$v{:}\ \ldots \to \ldots$

Ficha 2 Suryección. Inyección. Biyección. Función inversa.

1.-Clasificar los siguientes gráficos sagitales de funciones, analizando los conjuntos de llegada:





Nosotros realizamos la siguiente clasificación:

$A = \{c; d; e; f; h\}$

$\bar{A} = \{a; b; g\}$

¿Qué criterio utilizamos?

Las funciones del conjunto A se llaman ***suryecciones.***

> Se llama suryección de E sobre F a toda función para la cual se cumple que a cada punto del conjunto de llegada llega **por lo menos** una flecha.

Otra clasificación posible es la siguiente:

$R = \{a; e; h\}$

$\bar{R} = \{b; c; d; f; g\}$

¿Qué criterio se tuvo en cuenta?

Las funciones del conjunto R se llaman ***inyecciones.***

> Se llama inyección de E sobre F a toda función para la cual se cumple que a cada punto del conjunto de llegada llega **a lo sumo** una flecha.

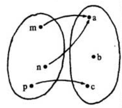
2.- Considerando los conjuntos A y R del apartado anterior, resolver A ∩ R.
¿Qué características presentan las funciones del conjunto resultado?
Dichas funciones se llaman ***biyecciones.***

Se llama biyección (o función biyectiva) a toda función a la vez suryectiva e inyectiva.

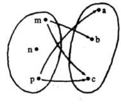
Toda función de S hacia B tal que todo elemento de B tiene uno y sólo un antecedente se llama biyección.

3.- De las funciones trabajadas en IV.1.9. a IV.1.11: ¿cuáles son inyecciones? ¿Cuáles suryecciones? ¿Cuáles biyecciones?

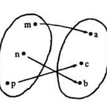
4.- a) Para cada una de las siguientes relaciones, contestar las siguientes preguntas:
i) ¿es función?
ii) la relación inversa ¿es función?
iii) ¿es biyección?



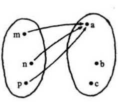
relación ***F***



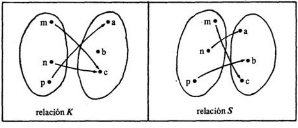
relación ***G***



relación ***H***



relación ***J***



b) X es un conjunto de músicos:

$X = \{A; B; C; D; E\}$

Y es un conjunto de instrumentos de música. Los elementos son: violín (v), violoncelo (l), piano (p), flauta (f), oboe (h), clavicémbalo (c) y clarín (t).

$Y = \{v; l; p; f; h; c; t\}$

T es la relación "sabe tocar" definida por el siguiente conjunto de pares ordenados:

$G = \{(A, v); (A, l); (B, h); (B, t); (C, p); (C, c); (D, v); (E, v); (E, c); (B, f)\}$

i) Representar con un esquema la relación *T*, ¿es función?
ii) Representar en otro esquema la relación *T*, inversa de *T*. ¿Es función?
iii) Para interpretar un determinado fragmento musical se necesita un violín, un clavicémbalo, un piano, un violoncelo y un oboe. Llamamos F al conjunto de estos instrumentos.

Sabiendo que cada músico debe participar en esta interpretación, decir qué instrumento debe ser usado por cada uno de ellos teniendo en cuenta los datos del conjunto G.

Dibujar el esquema cartesiano de la relación de X en F definida por: "debe utilizar". Esta relación, ¿es función? ¿Es biyección?

c) Sea un círculo C y D el conjunto de sus diámetros. A cada punto del círculo se hace corresponder el diámetro que pasa por ese punto. ¿Se define una función de C en D? ¿Es biyección? ¿Por qué?

d) Sea $A = \{1; 2\}$. Llamemos P al conjunto de partes de A.

i) Escribir P por extensión.
ii) Dada la relación *C*: "es complementario en A de" en el conjunto P, hacer el esquema sagital de *C*.
iii) *C* ¿es función? ¿Es biyección?
iv) ¿Cómo se define la relación inversa *C*'? ¿Es función? ¿Es biyección?

Ficha 3 Composición de relaciones; de funciones y de biyecciones.

Hasta aquí hemos estudiado relaciones y funciones entre dos conjuntos o en un mismo conjunto. En esta ficha 3 trabajaremos composición de relaciones y funciones, veamos en qué consiste.

1.- Sean los siguientes conjuntos de personas:

A = {Marta, Luisa, Susana, Graciela}

B = {Tomás, Ubaldo, Vicente, Pedro, Eduardo}

C = {Rodolfo, Diego, Francisco}

que para abreviar, indicaremos:

A = {M, L, S, G}

B = {T, U, V, P, E}

C = {R, D, F}

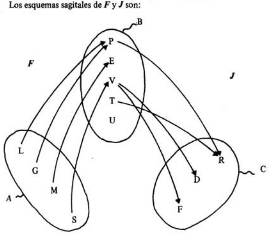
y las relaciones:

F : "tiene por padre a" de A hacia B

J : "tiene por hermano a" de B hacia C.

Atención: el conjunto final de ***F*** es el conjunto inicial de ***J***.

Los esquemas sagitales de ***F*** y ***J*** son:



L tiene por padre a P, que tiene por hermano a R, por lo tanto, L es sobrina de R.

Hacer el esquema sagital de la relación H "es sobrina de" de A hacia C. Los pares que cumplen la relación forman el conjunto.

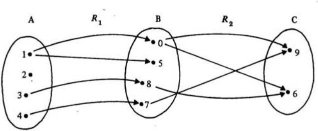
$\{(L, R); (G, R); (S, D); (S, F)\}$

H es la **relación compuesta** "F seguida de J" que se escribe "$J \circ F$" y se lee "J compuesta con F".

> La relación H es la ***relación compuesta*** de la relación F (de partida A y llegada B) seguida de la relación J (de partida B y llegada C).
>
> H es $J \circ F$
>
> La partida de H es la partida de F.
>
> La llegada de H es la llegada de J.

La notación $J \circ F$ puede parecer, a primera vista, curiosa, puesto que escribiendo de izquierda a derecha, se encuentra primero la segunda relación y luego la primera. Pero observamos que en la frase "el hermano del padre de L es R" la palabra "hermano", que se refiere a la segunda relación, precede a "padre" que se refiere a la primera.

2.- Sean R_1 y R_2 las relaciones definidas por los esquemas sagitales siguientes:



¿Qué elementos pertenecen a $R_2 \circ R_1$?

¿Cuál es la partida de R_2?

¿Cuál es la llegada de $R_2 \circ R_1$?

¿Cuál es la inversa $R_1{}'$ de R_1?

¿Qué elementos pertenecen a $R_1{}' \circ R_1$?

¿Cuál es la llegada de $R_1{}' \circ R_1$? ¿Y la partida?

¿Puede resolverse $R_1 \circ R_2{}'$: ¿Por qué?

3.- El siguiente ejercicio figura en la obra de R. Fletcher "L'apprentissage de la mathématique aujourd'hui", y nos parece un juego curioso de composición de relaciones.

"En sueco las palabras "fader" y "moder" significan "padre" y "madre". Pueden abreviarse en "far" y "mor", por ejemplo, para formar nombres compuestos.

En castellano sólo utilizamos dos palabras para llamar a los abuelos: "abuelo" y "abuela". En sueco utilizan cuatro palabras: "farmor", "farfar", "morfar" y "mormor".

a) "Farmor" significa "la madre del padre", es decir, "la abuela paterna". ¿Qué significan las otras tres palabras?

b) "Bror" significa "hermano" y existen dos palabras para "tío". Una de ellas es "farbror", ¿cuál será la otra?

c) La palabra "hijo" se traduce en sueco por "son". Dar una de las palabras para traducir "sobrino".

d) "Dotter" significa "hija". Buscar las cuatro palabras para traducir "nieto" y "nieta".

e) Completar las siguientes frases: (Nils y Olaf son nombres masculinos):

– Si Ubrika es "farmor" de Nils, entonces Nils es .... de Ubrika.

– Si Karl es "brorson" de Olaf, entonces Olaf es .... de Karl."

4.- Sean:

$A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$

$B = \{2; 3; 4; 5; 6\}$

$C = \{4; 6; 8; 10; 12\}$

y las biyecciones f de A hacia B y g de B hacia C definidas de la siguiente manera:

$A \to B$

$f\colon x \to x + 2$

$B \to C$

$g\colon y \to 2y$

Calcular las siguientes expresiones:

$f(0) =$........

$f(1) =$........

$f(4) =$........

$f(2) =$........

$f(3) =$........

El conjunto de llegada de $f(x) \to x + 2$ es el conjunto B. Calcular ahora $g(2)$; $g(3)$; $g(4)$; $g(5)$; $g(6)$.

El conjunto de llegada de g es C.

Hacer el esquema sagital de la función $g \circ f$.

¿Es f una biyección? ¿Por qué?
¿Es g una biyección? ¿Por qué?
¿Es g ∘ f una biyección? ¿Por qué?

Este ejercicio nos permite verificar una importante propiedad de la composición de biyecciones (que por supuesto es demostrable en términos generales). Dicha propiedad se enuncia así:

La composición de dos biyecciones es una biyección.

5.- Proponemos en esta ficha el ejercicio siguiente, para practicar la composición de biyecciones, y lo retomaremos en el Capítulo V, ficha 1, apartado 7, para analizar propiedades de la composición.

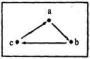
Sea el conjunto $E = \{a; b; c\}$.

Definir por extensión el conjunto M de palabras **de dos letras distintas** que se puedan formar con las letras del conjunto E.

$M = \{\ \ ;\ \ ;\ \ ;\ \ ;\ \ ;\ \ \}$

La biyección P definida en E por los siguientes esquemas permite transformar las palabras del conjunto M:

$$P = \left| \begin{array}{l} a \to b \\ b \to c \\ c \to a \end{array} \right.$$



Ejemplos:

– para transformar la palabra "ac" se tiene en cuenta que, por P:
  $a \to b$
  $c \to a$
por ello: $ac \to ba$

– para transformar "ba", se procede así:
  $b \to c$
  $a \to b$
en consecuencia, la palabra "ba" se transforma por P en "cb".

a) Además de la biyección P, pueden definirse en E cinco biyecciones diferentes:

$$Q = \left| \begin{array}{l} a \to a \\ b \to c \\ c \to b \end{array} \right. \qquad R = \left| \begin{array}{l} a \to a \\ b \to b \\ c \to c \end{array} \right.$$

La transformación R puede parecer improcedente a primera vista, pero tiene tanta importancia (lo veremos más adelante) como el número 0 para resolver $5+0$.
Encontrar las biyecciones restantes:

$$M = \left| \begin{array}{l} a \to b \\ b \to \\ c \to \end{array} \right. \qquad N = \left| \begin{array}{l} a \to c \\ b \to \\ c \to b \end{array} \right.$$

$$L = \left| \begin{array}{l} a \to c \\ b \to \\ c \to \end{array} \right.$$

b) ¿Qué ocurrirá si a una palabra de M le aplicamos la composición de la biyección P, seguida de la biyección Q?
Ejemplo:

$Q \circ P\,(a\,b)$
$P\,(a\,b) = b\,c$
$Q\,(b\,c) = c\,b$

De donde:
$Q \circ P\,(a\,b) = c\,b$

De las biyecciones P, Q, R, M, N, L (una sola de ellas) ¿cuál transforma la palabra "ab" en la palabra "cb"?
Es correcto, entonces, expresar que la biyección Q aplicada a continuación de la biyección P produce una transformación similar a la que efectúa la biyección L.
c) Completar las siguientes expresiones:

$N \circ Q =$	$R \circ P =$	$Q \circ M =$
$M \circ L =$	$P \circ L =$	$P \circ P =$
$R \circ R =$	$N \circ M =$	$Q \circ L =$

6.- Dadas las siguientes funciones:

$$f \left| \begin{array}{l} N \to N \\ x \to 2x+1 \end{array} \right. \qquad g \left| \begin{array}{l} N \to N \\ y \to y-2 \end{array} \right. \qquad h \left| \begin{array}{l} N \to N \\ z \to 3z-3 \end{array} \right.$$

calcular:

$f(5) =$	$g(6) =$	$h(1) =$
$f(0) =$	$g(10) =$	$h(10) =$
$f(3) =$	$g(5) =$	$h(3) =$
$f(17) =$	$g(101) =$	$h(0) =$
$f(100) =$	$g(2) =$	$h(7) =$
$f(58) =$	$g(81) =$	$h(100) =$
$f(4) =$	$g(0) =$	$h(2) =$

$g \circ f(5) =$	$f \circ g(5) =$	$g \circ h(2) =$
$h \circ f(1) =$	$f \circ h(6) =$	$h \circ g(13) =$

$g \circ h \circ f(2) =$
$h \circ g \circ f(2) =$
$h \circ h(3) =$
$g \circ g(5) =$
$f \circ f(0) =$
$f \circ g \circ g(3) =$

5

Leyes de composición.

Hasta aquí hemos estudiado ciertos aspectos fundamentales de la matemática, partiendo de la lógica. En efecto, los conjuntos y su operatoria han resultado, en la práctica, un lenguaje preciso para encarar un análisis de ciertas situaciones y determinadas operaciones.

Una "fisiología" de los conjuntos permitió introducirnos en un campo que, partiendo de los conjuntos, nos lleva a ampliar el espectro matemático en las relaciones, sus propiedades y sus tipos especiales (equivalencia y orden).

Limitando el referencial de las relaciones con condicionantes variados llegamos a las funciones. Dice Maurice Glaymann: "función: una palabra que es un mundo en la matemática".

El tratamiento de las funciones, sus propiedades, la composición de ellas y el descubrimiento de nuevas funciones mediante la composición, nos obliga a meditar un poco sobre las propiedades de esas composiciones, y sobre ciertas regularidades que se descubren en un análisis global del "comportamiento" de las funciones.

Vamos entonces, a trabajar el concepto matemático de composición de funciones, analizando las leyes de composición. La carga semántica del vocablo "composición" es enorme . . . ¿Es lo mismo "componer" para un músico, un pintor, un químico, un ceramista, un matemático?

Ficha 1 Ley de composición interna.

1.- Sea el subconjunto A de M:

$$A = \left\{ \Box ; \square ; \bigtriangleup ; \triangledown \right\}$$

Del conjunto de partes de A elegimos:

$$B = \left\{ \{\Box\} ; \{\square\} ; \{\Box , \bigtriangleup\} ; \{\Box \; \square\} ; \{\Box \; \square , \bigtriangleup\} \right\}$$

y con él resolvemos:

{□} ∪ {▫} = ...

{□} ∪ {□, ▷} = ...

Completar, resolviendo todas las uniones posibles de dos elementos de B. Volcar esos resultados en la siguiente tabla:

∪ ↗	{□}	{▫}	{□ △}	{□; ▫}	{□; ▫; △}
{□}					
{▫}					
{□; △}					
{□; ▫}					
{□, ▫, △}					

Analicemos la relación *F*: (x, y) → x ∪ y que tiene como dominio el producto cartesiano B X B. ¿Cuál es el conjunto de llegada de *F*? ¿Es una función de B X B en B?

2.- Sea el subconjunto D de partes de A:

D = {{□}; {△}; {□ △}}

Efectuar todas las uniones posibles de dos elementos de D, completando la siguiente tabla:

$\cup$ ↗	{ □ }	{ △ }	{ □, △ }
{ □ }			
{ △ }			
{ □, △ }			

Los resultados que figuran en la tabla, ¿son todos elementos de D? ¿Es una función D X D en D?

3.- Dado el conjunto T de partes de A:

T = { { □ } ; { △ } ; { □ , ▫ } ; { □ , △ } ; { ▫ , ▵ } }

a) Completar la siguiente tabla:

↗ $\cap$	{ □ }	{ △ }	{ □, ▫ }	{ □, △ }	{ ▫, ▵ }
{ □ }					
{ △ }					
{ □, ▫ }					
{ □, △ }					
{ ▫, ▵ }					

b) En este ejemplo ¿la intersección es una función de T X T en T?

4.- Sea J un conjunto de partes de A:

J = { ∅; {△}; {□}; {□, △}; {□, △} }

a) Hacer la tabla de la diferencia entre dos elementos de J.
b) ¿Es la diferencia una función de J X J en J?

Dado un conjunto K, se llama ***ley de composición interna*** en K a toda función f que a un par ordenado de K X K hace corresponder un elemento de K.

5.- *Ejercicios:*

Reproducir sobre papel transparente los siguientes dibujos:

V = □ P = ■ D = ◪ I = ◩

Superponer los dibujos P y D, ¿qué se ve? Es como P. Puede escribirse:

P * D = P

donde indicamos con * la operación de superponer un cuadradito sobre otro.

Completar:

V * P =
D * I =
I * V =

¿La operación * es una ley de composición interna sobre el conjunto K = {V; P; D; I} ?

Completar la tabla:

*	□	■	◪	◩
□				
■				
◪				
◩				

6.- Un golpe de vista rápido (mirar y no leer) a esta primera ficha del capítulo V podrá hacer pensar que se trata de un error de impresión, y no correspondería a un libro de matemática ¿verdad?

Lo que ocurre es que decidimos presentar las leyes de composición interna con conjuntos de tal índole, para evitar las posibles interferencias a la captación del concepto, por el empleo de operaciones ya internalizadas por un estudiante de nivel terciario.

Pero es posible, por supuesto, investigar la existencia de leyes de composición interna en las operaciones aritméticas elementales.

a) La suma en N ¿es una ley de composición interna? La suma, ¿adjudica a todo par de N X N un elemento de N?

b) Analicemos **la sustracción** en N. ¿Se encuentra en N el resultado (o compuesto) de 9 – 4? ¿Y el de 4 – 9?

La sustracción ¿es una función de N X N en N? ¿Por qué? ¿Es una ley de composición interna?

c) La multiplicación ¿es una ley de composición interna de N X N sobre N?

d) La división ¿es una ley de composición interna de N X N sobre N?

e) Precisamente, porque la sustracción no es una ley de composición interna en N ha sido necesario crear un conjunto que contenga a N y en el cual la sustracción sea una ley de composición interna. Volveremos sobre este tema en el capítulo de conjuntos numéricos.

7.- El ejercicio IV.3.5. presenta composición de biyecciones. ¿La operación allí utilizada es una ley de composición interna? ¿Por qué?

a) La siguiente tabla de Pitágoras o de Cayley resume la composición de biyecciones del ejercicio citado.

	R	P	Q	M	N	L
R						
P						
Q						
M						
N						
L						

Atención: por comodidad y simplicidad (ya que trabajaremos la composición sucesiva de funciones) recurriremos a un abuso de lenguaje que recomendamos tener en cuenta para no alterar los resultados a obtener. Por ejemplo: P. M significará la aplicación de la función P y a su resultado la función M. En términos generales: R.Q.L significará que primero se aplica R, a su resultado Q y finalmente L.

Utilizando la tabla precedente, resolver:

(P . M) . (N . L) = ...

[(Q . Q) . N] . (R . M) = ...

Encontrar el código que falta en:

P .   = M

Este último problema consiste en encontrar uno o varios códigos X (por supuesto, si existen) tales que:

P . X = M

Encontrar todos estos códigos es **resolver una ecuación.**

Resolver las ecuaciones siguientes:

Q . X = P

(L . X) . N = R

Observación: en esta ficha hemos empleado (y lo seguiremos haciendo) distintos símbolos para representar leyes de composición ($\cup, \cap, \setminus$, *, +, –, x ; :). Hay algunas leyes que se usan muy a menudo, y por ello es cómodo adoptar un mismo símbolo cada vez que uno se refiere a ellas (como el caso de +, –, x, :, $\cup$, $\cap$, etc.). Así haremos de aquí en adelante.

Para no complicar el trabajo de los tipógrafos usaremos para las otras operaciones los signos * , $\triangle$, $\bigcirc$. Esto no significará que un signo, por ejemplo * represente siempre la misma operación.

Ficha 2 Propiedad conmutativa.

En la ficha 1 verificamos que hay leyes de composición de funciones que teniendo como dominio A X A, todas sus imágenes están en A (leyes de composición **interna**) y otras en que esa particularidad no se cumple (la sustracción para N X N en N, por ejemplo).

De aquí en más analizaremos otras propiedades de las leyes de composición, pero por razones de extensión del tema (que excedería matemáticamente los contenidos del programa para los Institutos de Formación Docente) nos limitaremos a funciones de la forma A X A en A, es decir a **leyes de composición interna.** Por lo tanto, a partir de esta ficha 2, cada vez que se lea "ley de composición" deberá pensarse en "ley de composición interna" (llamada por algunos autores "ley de clausura"), ya que no trataremos leyes de composición que no lo sean.

1.- La tabla siguiente define una ley de composición simbolizada Δ en el conjunto $A = \{p; q; r\}$

Δ	p	q	r
p	p	q	r
q	q	r	p
r	r	p	q

$q \Delta r = p$
$r \Delta q = p$

es decir que:
$q \Delta r = r \Delta q$

¿ocurre lo mismo para $p \Delta q$ y $q \Delta p$? ¿y para $p \Delta r$ y $r \Delta p$? ¿Es verdadero para cualquier $(x, y) \in A \times A$ que $x \Delta y = y \Delta x$? ¿Existe algún par de elementos de A para el cual no sea verdadero que $x \Delta y = y \Delta x$?

2.- En cuanto a las operaciones conjuntistas, hemos visto ya que en un conjunto de partes de F, cualquiera sean las partes A y B de F:

$A \cap B = B \cap A$
$A \cup B = B \cup A$

3.- Responder V (verdadero) o F (falso) en cada uno de los siguientes casos de leyes de composición de N X N en N:

a) $a + b = b + a$	V	F
b) $a \,.\, b = b \,.\, a$	V	F

4.-

> Una ley de composición $*$ sobre un conjunto S es **conmutativa**, significa que para todo elemento (x, y) de S X S
> $$x * y = y * x$$

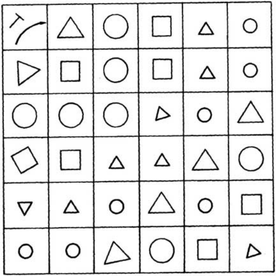
5.- Verificar si son conmutativas las leyes de composición definidas en las siguientes tablas:

a)

D	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	0	5	4	3	1
2	2	4	0	5	1	2
3	3	5	4	0	2	1
4	4	2	3	1	5	0
5	5	3	1	2	0	5

La flecha recuerda el sentido en el cual se efectúa la operación.

b)



c)

¡	◁	a	1
1	1	▷	▽
△	△	a	1
a	a	△	a

La operación "¡" ¿es conmutativa? Si no lo es, modificar la tabla con el menor número de cambios posibles para que se transforme en una ley de composición conmutativa.

Ficha 3 Elemento neutro.

En la ficha 2 presentamos ejercicios para descubrir la existencia o no de la propiedad conmutativa de las leyes de composición interna.

El lector habrá apreciado que resulta muy cómodo trabajar con tablas pitagóricas para analizar propiedades de las leyes de composición, especialmente si se trata de conjuntos con pocos elementos.

Por supuesto que el matemático no trabaja siempre con conjuntos finitos y de cardinal tan pequeño. Además la ciencia matemática no se caracteriza por verificar para cada ejemplo el cumplimiento, elemento a elemento, de una propiedad. Recurre a demostraciones generales que le dan la certeza del hecho, sin verificaciones parciales.

Como no podrá ser ésa la forma de trabajar con los niños de la escuela primaria cuando el lector ejerza su profesión, hemos elegido la metodología que sí podrá usar con alumnos de 6 a 12 años, permitiéndonos citar al final bibliografía matemática en la que podrán encontrarse los desarrollos científicos correspondientes a cada tema.

1.- La propiedad a analizar en esta ficha es muy sencilla, y por eso comenzaremos directamente por su definición:

> Sea un conjunto P, una ley de composición $*$ sobre P y un elemento **e** de P. "e es elemento neutro para la ley $*$" significa:
>
> para todo x, $x \in P$, $x * e = x$ y $e * x = x$

a) 0 es el elemento neutro de la suma en N, ya que para cualquier natural n se verifica:

$n + 0 = n$
$0 + n = n$

b) ¿Cuál es el elemento neutro de la multiplicación en N?
c) ¿Cómo se reconoce en una tabla de una operación, el elemento neutro de ésta?

2.- Estudiar las siguientes leyes de composición (ya presentadas en las fichas precedentes) para determinar si tienen elemento neutro y cuál es, en caso afirmativo:

Ficha	Ley comp.	¿tiene neutro?	el neutro es
1, ap. 1			
1, ap. 3 c			
1, ap. 4			
1, ap. 7			
2, ap. 5 b			
2, ap. 5 c			
1, ap. 5			
2, ap. 1			

3.- En el conjunto $J = \{ 4; 8; 9 \}$, sea la ley ⊠ definida así:

- a dos elementos de J hace corresponder:
  - el mismo, si los elementos son iguales;
  - el mayor, si son diferentes.

a) Hacer la tabla de ⊠.
b) ⊠ ¿es conmutativa?
c) ⊠ ¿tiene elemento neutro?

4.- Las leyes de composición presentadas en las siguientes tablas ¿tienen o no neutro?

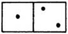
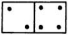
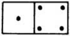
*	0	1	2
0	0	1	2
1	2	0	1
2	1	2	0

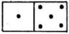
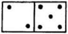
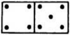
○	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	0
2	0	2	1

⌋	0	1	2
0	1	0	2
1	0	1	2
2	2	2	0

5.- El siguiente ejercicio ha sido elaborado en base a una idea presentada por F. Jarente en "Operadores en la escuela elemental".

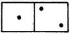
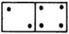
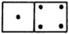
Sean las siguientes fichas de dominó:

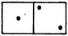
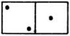
a  b  c 

d  e  f 

que constituyen el conjunto I = { a; b; c; d; e; f }

La ley X hace corresponder a dos dominó, el dominó formado en una parte por la cifra más grande y en la otra por la cifra menor de las cuatro comparadas. Por ejemplo:

 X  = 

aclaración:  y  son evidentemente iguales.

a) hacer la tabla de X.
b) ¿es X una ley de composición interna sobre I?
c) ¿Existe un elemento neutro?

6.- Sea un conjunto D = { ○ ⊙; ◎ }

Hacer la tabla de una ley de composición * sobre D que cumpla las condiciones siguientes:

a) ○ sea elemento neutro;
b) la ley sea conmutativa;

c) para cualquier elemento x de D se cumpla:

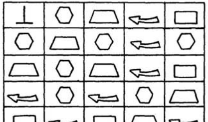
$$\odot * x = \odot$$

¿Cuántas leyes distintas pueden definirse?

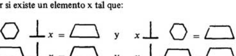
Ficha 4 Elemento simétrico.

En esta ficha estudiaremos otra particularidad que puede encontrarse, o no, en las leyes de composición interna.

1.- Sea la ley de composición interna $\perp$ dada en la siguiente tabla:



a) $\perp$ ¿es una ley conmutativa?
b) ¿Cuál es el elemento neutro de $\perp$?
c) Buscar si existe un elemento x tal que:



Observación: ese elemento x debe ser elemento del conjunto sobre el cual se opera, pero **no necesariamente el mismo** para

2.- En la ficha V.1.5. se analizó la ley de composición $*$ en $K = \{ V, P, D, I \}$, de la cual se confeccionó la tabla pitagórica.

a) $*$ ¿es una ley conmutativa? ¿tiene neutro?
b) Investigar si existe un elemento x de K tal que:

$$x * P = V \qquad y \qquad P * x = V$$

y también para los siguientes pares de igualdades (teniendo en cuenta, además, lo señalado en la observación del apartado 1.c):

$$D * x = V \quad y \quad x * D = V$$
$$I * x = V \quad y \quad x * I = V$$
$$V * x = V \quad y \quad x * V = V$$

3.- Si $*$ es una ley de composición interna en F que tiene un elemento neutro **e**, se dice que el elemento **a** de F **admite como simétrico** al elemento **b** de F si:

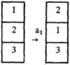
$$a * b = e \quad y \quad b * a = e$$

a) En los ejemplos de esta ficha, determinar los elementos que tienen simétrico. ¿Cuál es el simétrico en cada caso? ¿Cuál es el simétrico del elemento neutro?
b) No tiene sentido hablar de elemento simétrico, si la ley de composición no tiene neutro. Además, hay casos en que el simétrico de un elemento es ese mismo elemento. Si el lector relee los ejercicios anteriores de este capítulo, y analiza para cada ley de composición la existencia de simétricos puede enriquecer su caudal matemático y encontrarse con situaciones especiales. Por ejemplo: ¿puede un elemento tener más de un simétrico?

4.- Damos ahora una nueva ley de composición:

a) Sobre el casillero

consideremos las transformaciones siguientes:



aquí a_1 cambia la ubicación de los dos casilleros superiores.

b) Otras transformaciones en este ejemplo son:

a_2: cambia la ubicación de los dos casilleros inferiores;

ejemplo: $$\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline\end{array} \xrightarrow{a_2} \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 3\\\hline 2\\\hline\end{array}$$

a_3: cambia la ubicación en los casilleros enviando la primera a la segunda, la segunda a la tercera y la tercera a la primera:

ejemplo: $$\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline\end{array} \xrightarrow{a_3} \begin{array}{|c|}\hline 3\\\hline 1\\\hline 2\\\hline\end{array}$$

a_4: es la transformación que no cambia nada.

ejemplo: $$\begin{array}{|c|}\hline 2\\\hline 3\\\hline 1\\\hline\end{array} \xrightarrow{a_4} \begin{array}{|c|}\hline 2\\\hline 3\\\hline 1\\\hline\end{array}$$

a_5:

$$\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline\end{array} \xrightarrow{a_5} \begin{array}{|c|}\hline 2\\\hline 3\\\hline 1\\\hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline\end{array} \xrightarrow{a_6} \begin{array}{|c|}\hline 3\\\hline 2\\\hline 1\\\hline\end{array}$$

c) Practicar las transformaciones a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 y a_6 con cualquier terna inicial. Por ejemplo:

$$\begin{array}{|c|}\hline 2\\\hline 1\\\hline 3\\\hline\end{array} \xrightarrow{a_1} \begin{array}{|c|}\hline \quad\\\hline \quad\\\hline \quad\\\hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|}\hline 3\\\hline 1\\\hline 2\\\hline\end{array} \xrightarrow{a_2} \begin{array}{|c|}\hline \quad\\\hline \quad\\\hline \quad\\\hline\end{array} \xrightarrow{a_1} \begin{array}{|c|}\hline \quad\\\hline \quad\\\hline \quad\\\hline\end{array} \xrightarrow{a_3} \begin{array}{|c|}\hline \quad\\\hline \quad\\\hline \quad\\\hline\end{array}$$

d) Sea G el conjunto de todas las transformaciones definidas:

$$G = \{a_1 ; a_2 ; a_3 ; a_4 ; a_5 ; a_6\}$$

y Δ la ley que a dos transformaciones x e y hace corresponder la transformación que produce el mismo efecto que x seguida de y. Por ejemplo:

$$\begin{array}{|c|}\hline 2\\\hline 1\\\hline 3\\\hline\end{array} \xrightarrow{a_2} \begin{array}{|c|}\hline 2\\\hline 3\\\hline 1\\\hline\end{array} \xrightarrow{a_1} \begin{array}{|c|}\hline 3\\\hline 2\\\hline 1\\\hline\end{array} \qquad \text{aquí } a_2 \,\Delta\, a_1 = a_3$$

¿Es Δ una ley de composición interna en G?

$a_1 \Delta a_1 = \ldots$
$a_2 \Delta a_1 = \ldots$
$(a_3 \Delta a_2) \Delta a_2 = \ldots$

e) Hacer la tabla pitagórica de Δ en G.
¿Cuál es el elemento neutro? ¿Δ es conmutativa? ¿Cuál es el simétrico de cada elemento de G?

5.- a) La suma en N ¿tiene neutro? ¿Tiene simétrico?
b) La multiplicación en N ¿tiene neutro? ¿Tiene simétrico?

6.- Dado el conjunto $Y = \{a; 4; \Delta\}$ inventar una ley de composición interna "o" sobre Y con las condiciones siguientes:

- la ley es conmutativa;
- a es el elemento neutro;
- todo elemento posee un único simétrico;
- $\Delta \circ \Delta = a$

a) Confeccionar la tabla operacional.
b) Comparar su resultado con el de otros lectores para verificar si todos llegan a la misma solución.
c) ¿Hay una única solución?

Ficha 5 Propiedad asociativa.

El siguiente ejercicio es una adaptación de un trabajo realizado por el Grupo de Psicomatemática de la Universidad Nacional del Comahue en 1975. El mismo fue experimentado en 3er grado de la escuela nº 53 de Cipolletti (Río Negro), al tratar el tema "necesidad del uso de paréntesis".

1.- Había una vez un rey que se llamaba Tan y reinaba en el país de Tanatan. Un día el rey decidió organizar la escritura en su país y dictó una serie de ordenanzas con ese fin:

Ordenanza 1: para escribir se usarán sólo las letras de mi nombre y el de mi país.

¿Cuál es el alfabeto en Tanatan, de acuerdo con la ordenanza 1?
Escribir nueve palabras diferentes, todas ellas de dos letras.
Escribir mensajes distintos formados por palabras de más de tres letras.

2.- Para simplificar la escritura, el rey Tan dictó la ordenanza 2.

Ordenanza 2: si en una palabra dos letras iguales son consecutivas, se cambian por una sola de ellas:

aa → a
nn → n
tt → t

Por ejemplo:

naatattnann ⟶ natatnan

a) Reducir el siguiente mensaje:

nattan ttanna tanntaan

b) Escribir cinco palabras que no puedan reducirse.

3.- El trabajo de reducción entusiasmó a los habitantes de Tanatan, que recibieron con alegría la ordenanza 3, ya que con ella se amplían las posibilidades de juego:

Ordenanza 3:

an → t
at → n
tn → a
na → t
nt → a
ta → n

a) Confeccionar la tabla operacional de las letras, según las ordenanzas 2 y 3.
b) Con ayuda de la tabla, reducir el siguiente mensaje: atana. ¿Existe un único mensaje reducido? ¿Por qué?

4.- Los alumnos de 3er grado que resolvieron esta serie de ejercicios llegaron a las siguientes situaciones:

$\underbrace{a\ t}\ \underbrace{a\ n}\ a$	$\underbrace{a\ t}\ \underbrace{a\ n}\ a$	$\underbrace{a\ t}\ a\ n\ a$
$\underbrace{n\ t}\ a$	$n\ \underbrace{t\ a}$	$\underbrace{n\ a}\ n\ a$
$\underbrace{a\ a}$	$\underbrace{n\ n}$	$t\ \underbrace{n\ a}$
a	n	$\underbrace{t\ t}_{t}$

Ante la evidencia de los resultados diferentes por aplicación de las mismas ordenanzas, ellos propusieron el uso de símbolos (entre ellos la coma y el paréntesis), que permitían dar un mensaje y llegar a una respuesta única.

Recordemos que el objetivo del trabajo era descubrir la necesidad del uso de paréntesis. Nuestro objetivo no es ése aquí, pero usamos la misma ejercitación porque permite acercarnos a la comprensión de una propiedad de algunas (y no de todas) las operaciones. Usando los paréntesis planteamos una situación dirigida a alcanzar el objetivo de esta ficha.

a) Llamamos $*$ a la ley de composición definida por la tabla del apartado 3.a. Completar:

$(t * a) * n =$ $\qquad$ $n * (a * t) =$

$t * (a * n) =$ $\qquad$ $(n * a) * t =$

b) Los resultados del item anterior nos permiten afirmar que, para $*$ en $\{t; a; n\}$:

$(t * a) * n \neq t * (a * n)$

$n * (a * t) \neq (n * a) * t$

5.- Manteniendo el mismo conjunto $\{t; a; n\}$ definimos una nueva operación con la siguiente tabla:

.	t	a	n
t	t	a	n
a	a	n	t
n	n	t	a

a) Completar:

$(t . a) . n =$ $\qquad$ $n . (a . t) =$

$t . (a . n) =$ $\qquad$ $(n . a) . t =$

b) Ubicar los símbolos $=$ o $\neq$ (según corresponda):

$(t . a) . n$ ... $5 . (a . n)$

$n . (a . t)$ ... $(n . a) . t$

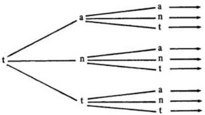
c) Una ley de composición $\circ$ sobre E es **asociativa** si **para todos** los elementos x, y, z de E se cumple:

$$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$$

6.- **Atención**: la definición de la propiedad asociativa (como así también la de la conmutativa) exige su verificación **para todos** los elementos del conjunto sobre el cual se opera.

Para demostrar que una ley de composición no es asociativa, basta hallar tres elementos que, al ser operados, no la cumplan.

a) Con la ayuda de un diagrama de árbol, encontrar los 27 ordenamientos posibles de las letras n, a, t.



(esta es una rama del árbol, la que comienza con **t**; completar el diagrama con las restantes, que comienzan con **a** y con **n**).

De estos 27 ordenamientos, ¿existe alguno para el cual: $(x \cdot y) \cdot z \neq x \cdot (y \cdot z)$?

7.- a) ¿Cuáles de las leyes de composición interna estudiadas en esta ficha ($*$ y $.$) son asociativas?

b) ¿Cuáles de las leyes de composición interna analizadas en todo el capítulo son asociativas?

8.- Resumir en una tabla todos los conceptos teóricos tratados en este capítulo (ley de composición interna, elemento neutro, conmutatividad, elemento simétrico o inverso, asociatividad):

Ficha	conjunto	denominación de la ley	escritura	comp. int.	C	N	S	A
1.1	$A \subset M$, $B \subset$ en partes de A	unión		sí	s	n	n	s
1.2	$A \subset M$, $D \subset$ en partes de A	unión		no				
1.3	$A \subset M$, $T \subset$ en partes de A	intersección		no				
1.4								
1.5								
1.6a	N	suma						
1.6b								
1.6c								
1.6d								
1.7	$\{P, R, Q, M, N, L\}$			sí				

...

... Completar la tabla con los datos no especificados.

Las abreviaturas empleadas significan: "C" (conmutatividad), "N" (neutro), "S" (simétrico) y "A" (asociatividad).

Ficha 6 Estructura de grupo; ecuaciones.

En este capítulo hemos trabajado propiedades de las operaciones, presentando ejemplos en los que esas propiedades se verifican o no. La presentación de ejemplos y contraejemplos de una situación nos parece importante para valorar la existencia de las propiedades, teniendo en cuenta que muy esporádicamente recurrimos a las demostraciones matemáticas, que constituyen la única arma precisa y concluyente para el tratamiento del tema a nivel formal.

¿Por qué es importante conocer las propiedades de una operación? Porque basándonos en esas propiedades, pueden formularse ciertos "modelos matemáticos" o "estructuras" que facilitan el ulterior tratamiento de contenidos. Veamos una de esas estructuras y algunas de sus aplicaciones.

1.- Si " ° " es una ley de composición interna sobre F, se dice que " ° " ***es una ley de grupo sobre F*** o que F ***es un grupo para la ley " ° "*** si:

- la ley " ° " es asociativa;
- la ley " ° " posee un elemento neutro;
- todo elemento de F posee un simétrico.

El resumen del apartado 8 de la ficha 5 permite asegurar que, de acuerdo a la definición precedente, las siguientes operaciones (cada una especificada sobre qué conjunto) es un grupo:

Ficha	Conjunto	Operación
V.1.7	en $\left\{ \begin{array}{l} \text{P, R, Q, M, N,} \\ \text{L} \end{array} \right\}$ el conjunto de biyecciones	composición de biyecciones
. .	. . . .	. . . .

(Completar la lista leyendo atentamente el resumen citado de la ficha anterior).

2.- Se llama ***grupo conmutativo*** o ***abeliano*** a la operación * sobre E que, **además de las condiciones de grupo**, cumple la propiedad ***conmutativa.***

Teniendo en cuenta la definición que antecede y el resumen de verificación (o no) de propiedades en las operaciones de todos los ejercicios desarrollados en este capítulo, confeccionar la nómina de grupos abelianos, explicitando en cada caso conjunto y operación.

3.- **Atención**: cuando se habla de estructura de grupo debe hacerse referencia al conjunto de elementos de que se trate y a la ley de composición en él definida. Por ejemplo:

$< A, * >$ $\qquad$ $< S, ° >$

4.- El conjunto $\{ t; a; n \}$ con la operación "." (ficha 5 apartado 5) es un grupo conmutativo.

Resolver en $\langle \{t; a; n\} , \ . \rangle$ las siguientes ecuaciones:

a) $x \,.\, a = n$

¿Cómo identificar al elemento x que compuesto con **a** dé por resultado **n**?

Si se observa la tabla, puede determinarse inmediatamente que $x = a$.

b) $n \,.\, x = t$ (determinar x)

c) $x \,.\, n = a$ (determinar x)

d) $[(a \,.\, x) \,.\, t] \,.\, n = a$

Esta ecuación también puede resolverse, pacientemente, mediante el uso de la tabla. Pero puede recurrirse a las propiedades de grupo y encontrar así el valor de x. Para ello recordemos las propiedades del grupo $\langle \{t; a; n\}, \;.\; \rangle$:

A_1: . es una ley de composición interna.

A_2: . tiene un neutro, que es t.

A_3: . es asociativa.

A_4: por . , todo elemento t, a, n tiene un simétrico o inverso . Partiendo del enunciado:

$[(a \,.\, x) \,.\, t] \,.\, n = a$	podemos operar en ambos miembros y resolver (ley de clausura A_1)
$[(a \,.\, x) \,.\, t] \,.\, n \,.\, a = a \,.\, a$	(elegimos **a** porque sabemos que es $n \,.\, a = t$, aplicando sucesivamente A_2 y A_4)
$[(a \,.\, x) \,.\, t] \,.\, t = a \,.\, a$	(por propiedad del neutro identificado en A_2) será:
$(a \,.\, x) \,.\, t = a \,.\, a$	(nuevamente por propiedad del neutro A_2) será:
$(a \,.\, x) = a \,.\, a$	

Si lo que buscamos es el valor de **x**, un recurso conveniente es "anular" **a** (con lo cual nos quedaría claramente la expresión del valor de x). Un modo adecuado es operar por el simétrico de **a** (ya que un elemento operado con su simétrico da el neutro, ¿verdad?). Luego:

$n \,.\, a \,.\, x = n \,.\, a \,.\, a$	por propiedad del simétrico será:
$t \,.\, x = n \,.\, a \,.\, a$	por propiedad del neutro llegamos a:
$x = n \,.\, a \,.\, a$	la tabla operacional nos permite, finalmente expresar:
$x = t \,.\, a$	y por aplicación de A_2 y propiedad del neutro se llega a:

$$\boxed{x = a}$$

5.- Una de las ventajas de saber que un conjunto A, munido de una operación Δ es un grupo, reside precisamente, en que toda ecuación planteada en él tiene solución, y la solución es única (esto último demostrable por un teorema, consultar bibliografía).

Las consecuencias pedagógicas de las afirmaciones precedentes son enormes, si tenemos en cuenta que gran porcentaje de los problemas que se plantean como actividades en la escuela primaria, se resuelven por ecuaciones. De modo que, sabiendo a qué estructura o modelo matemático corresponden el conjunto y la operación planteados, tenemos la certeza o no de la obtención de respuestas únicas, como así también de numerosos caminos factibles para llegar a la respuesta.

Para poder apreciar esto más profundamente correspondería realizar numerosos ejercicios y problemas, pero también conocer otras estructuras algebraicas (anillo, cuerpo, espacio vectorial) y practicar demostraciones y aplicaciones no sólo en el campo matemático. Las posibilidades del tema exceden el marco de estas guías de trabajos prácticos para Institutos de Formación Docente, por su extensión y profundidad. Las estructuras algebraicas constituyen un área muy amplia, un sector apasionante (como muchos) en esta ciencia en continua y acelerada evolución que es la matemática.

6.- En la esfera de la mayoría de los relojes las cifras escritas son:
$H = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12\}$
El uso diario nos ha llevado a leer "14 horas" cuando, después del mediodía, el reloj marca la hora "2". En este ejercicio nos limitaremos a leer en el reloj lo que realmente éste marque. Además, llamaremos "$\oplus$" a la operación de agregar horas en el sentido que normalmente avanza el reloj. Por ejemplo:

$2 \oplus 7 = 9$; $4 \oplus 9 = 1$; $7 \oplus 8 = 3$
$5 \oplus 12 = 5$

a) Resolver las siguientes operaciones:

$1 \oplus 4 =$
$4 \oplus 3 =$
$10 \oplus 5 =$
$6 \oplus 7 =$
$8 \oplus 3 =$

b) La operación $\oplus$ ¿tiene estructura de grupo? ¿Por qué?
c) ¿Es grupo abeliano? Justificar la respuesta.
d) En $\langle H, \oplus \rangle$ el neutro es 12, ¿por qué?
¿Cuál es el inverso de 8? ¿De 5? ¿De 1? ¿De 12?
e) Resolver, en $\langle H, \oplus \rangle$:
$x \oplus 9 = 1$
Mentalmente se puede dar la respuesta que es 4. ¿Qué axiomas de grupo pueden emplearse para justificar el cálculo mental?
$x \oplus 9 = 1$
por aplicación del axioma...
$x \oplus 9 \oplus 3 = 1 \oplus 3$

de donde, por el axioma...

$x = 1 \oplus 3$

$x = 4$

f) Resolver las siguientes ecuaciones, justificando cada paso por la aplicación de los axiomas de grupo:

i) $(2 \oplus x) \oplus 7 = 1$

ii) $2 \oplus 5 \oplus x = 3$

iii) $6 \oplus x \oplus 9 = 2 \oplus 1$

iv) $x \oplus 11 = 3 \oplus 4 \oplus 1$

v) $[(2 \oplus 12) \oplus 1] \oplus 8 \oplus x = 1 \oplus 3$

7.- Si en lugar de utilizar el reloj y el avance de horas, se trabaja con los días de una semana y el transcurrir del tiempo, o con el calendario anual empleando los meses, pueden construirse juegos interesantes, todos ellos con estructura de grupo. Precisamente la certeza del conocimiento de la estructura nos permite enriquecer la actividad planteando todo tipo de ecuaciones, ya que sabemos "a priori" que las mismas tienen solución única. Es más, conocemos de antemano las reglas a aplicar para solucionar esas ecuaciones.

Evidentemente estamos ante la presencia de un recurso didáctico excepcional para la planificación de problemas y actividades que tiendan a lograr objetivos fundamentales en la planificación matemática de cualquier curso y nivel.

8.- Planteamos, a continuación, un último ejercicio:

La operación Δ (diferencia simétrica) en el conjunto P de partes de L, siendo $L = \{a; b; c\}$ ¿constituye grupo?

a) Definir por extensión P.

b) Confeccionar la tabla pitagórica de Δ.

c) Verificar el cumplimiento o no de las propiedades de un grupo.

d) ¿Es grupo abeliano?

e) Resolver en $< P, \Delta >$ las siguientes ecuaciones:

i) $x \Delta \{a; b\} = \{a; b; c\}$

ii) $(\phi \Delta x) \Delta \{a\} = \{b\}$

iii) $(\{a; c\} \Delta \phi) \Delta (\{b; c\} \Delta x) = \{c\}$

iv) $x \Delta [\phi \Delta (\{b\} \Delta \{a; c\})] = \{b; a\}$

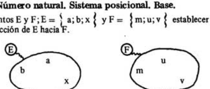
6

Conjuntos numéricos

El estudio de números y operaciones numéricas ha ocupado lugares destacados en las programaciones escolares, y seguirá ocurriendo así, porque esos contenidos temáticos son adecuados aun si se los analiza desde concepciones antagónicas de lo que es el aprendizaje matemático. Para los "utilitaristas" es fundamental el manejo de los números y el cálculo, que constituyen el instrumento básico de las aplicaciones prácticas de la matemática. Para quienes piensan que el aprendizaje matemático permite desarrollar aptitudes no sólo intelectuales sino también de creatividad, artísticas y afectivas, el tratamiento de número y operaciones permite fácilmente organizar aulas de alumnos entretenidos, en actitud de búsqueda y con múltiples posibilidades de manipuleo de concretizaciones introductorias para las abstracciones.

Ficha 1 Número natural. Sistema posicional. Base.

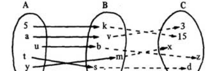
1.- Sean dos conjuntos E y F; $E = \{a; b; x\}$ y $F = \{m; u; v\}$ establecer mediante flechas una biyección de E hacia F.



En otro esquema establecer una biyección de F hacia E.

Dados dos conjuntos, si existe una biyección de uno de los dos hacia el otro, diremos que los dos conjuntos son **coordinables**.

Observar el esquema siguiente:



Tenemos una función "f" de A hacia B ¿Es biyectiva? Completar:

"A y B ...."

Se tiene también una biyección "g" de B hacia C. Completar:

"B y C ...."

Copiar de nuevo en dos diagramas de Venn los conjuntos A y C y dibujar el esquema sagital de "g o f". ¿Es una biyección?

Se tiene entonces: "A y C ...."

Conclusión: si A y B son coordinables y si B y C son coordinables, entonces .....
....

2.- Los conjuntos E y F del apartado 1 son coordinables. Se observa que tienen el mismo número de elementos; esto se escribe:

"n (E) = n (F)" y se lee: "El número de elementos de E es igual al número de elementos de F".

La relación "es coordinable con" en conjuntos de conjuntos da lugar a una partición en clases de equivalencia.

La propiedad que reúne a los elementos de una misma clase se llama "*número natural*" o simplemente, "natural".

No se piense que, con esta afirmación, dejamos de lado el importante aspecto de la ordinalidad en la serie numérica. El análisis matemático de cardinalidad - ordinalidad - sucesión - serie númerica excede el marco de estas fichas de trabajos prácticos; remitimos al lector ávido de interiorizarse en el tema a la bibliografía específica citada.

El conjunto de los números naturales es habitualmente representado por "N".

3.- *Ejercicios.*

a) Sea P el conjunto de las provincias argentinas y G el conjunto de los gobernadores. Estos dos conjuntos ¿son coordinables? ¿Son iguales n(P) y n(G)? ¿Es necesario conocer, para poder contestar, el número de provincias argentinas?

b) De los siguientes conjuntos señalar los que tengan el mismo número de elementos: $\{x\}$; $\{a; b; u\}$; el conjunto de dedos de una mano; el conjunto de las letras de la palabra 'ratón"; $\{a; f; s; 1; h\}$; $\{\triangle, \square\}$; ϕ; $\{a\}$.

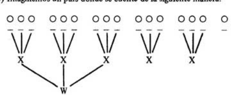
Atención: el número de elementos del conjunto vacío es cero y se indica "n $(\phi) = 0$"

Sean los dos conjuntos $\{a; b; c\}$ y $\{c; b; a\}$. ¿Son iguales? ¿Son coordinables?

4.- a) En la numeración romana, para escribir los números naturales, se hacen alternativamente grupos de cinco y de dos:

IIIII se escribe V
VV se escribe X
XXXXX se escribe L
LL se escribe C
CCCCC se escribe D
....

b) Imaginemos un país donde se cuente de la siguiente manera:



uno se representa por una rayita "–", decimos luego que:

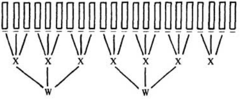
– – – = X
X X X = W

Para escribir dieciséis, en este sistema, podemos dibujar un árbol como el anterior, que tiene dieciséis puntos en el primer nivel, y en los siguientes está dibujada la convención de transformación de símbolos. Así observamos que dieciséis se escribe WXX– o bien XX–W o bien –WXX.

i) Escribir dieciocho en este sistema (formar el árbol correspondiente); después deducir de ello las formas de escribir diecinueve y veinte.
ii) ¿Qué número representa WX; WX–; WW–?
iii)Para escribir veintisiete (formar también un árbol) se necesita otro símbolo.

En cada árbol dibujado se observa: en el primer nivel "–", en el segundo nivel "X" y en el tercer nivel "W" (en los niveles siguientes los símbolos que se hayan elegido). Para simplificar aún más la codificación haremos el siguiente convenio:
– ordenar la escritura de derecha a izquierda, comenzando siempre por el primer nivel del árbol;
– numerar la cantidad de símbolos de un mismo nivel; por ejemplo:
– – por 2, X por 1, W por 1;
– poner un 0 si no hay símbolo en el nivel correspondiente.

Ejemplo:

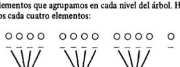


tercer nivel	segundo nivel	primer nivel
W W	X	–
2	1	1

Atención: se lee "dos, uno, uno".

Conclusión: en este sistema de numeración necesitamos tres cifras: 0, 1, 2 para escribir todos los naturales; diremos que escribimos los naturales en **base tres**.

c) Podemos seguir el mismo procedimiento, cambiando solamente la cantidad de elementos que agrupamos en cada nivel del árbol. Hagámoslo ahora con agrupamientos cada cuatro elementos:



Se escribe: XXX–

¿Cómo se escribe en este nuevo sistema el diecinueve? ¿Y el veintidós? ¿Y el ocho?

¿Qué números representan WX––; WW–––; XXX–––?

El sistema aquí empleado es de base cuatro, ¿por qué?

Nuestro sistema habitual de numeración se llama de base diez, porque los símbolos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) son diez en cada nivel del árbol y se agrupan los elementos de a diez.

d) Completar el siguiente cuadro, sabiendo que en cada columna se debe escribir el mismo natural en las diferentes bases:

base diez	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
base dos											
base tres											
base cinco											
base ocho											

– Sea el natural 57 (base diez), escribirlo en base tres.
– ¿Cuántas cifras se utilizan en base dos? Escribir 57 (base diez) en base dos.
– ¿Cuántas cifras se utilizan en base siete? Escribir 57 (base diez) en base siete.
– En base dos, ¿cuál es el menor natural de dos cifras? ¿Y el mayor natural de dos cifras? Las mismas preguntas para los naturales de tres cifras.
– ¿En qué base el natural once se escribe 21? En esta misma base escribir doce y trece.
– Damos una lista de naturales escritos en distintas bases:

a = 1 (base diez)
b = 21 (base once)
c = 12 (base cinco)
d = 10 (base tres)
e = 12 (base siete)
f = 4 (base diez)
g = 8 (base nueve)
h = 10 (base ocho)

escribir de nuevo esta lista, ordenando los naturales del menor al mayor.

e) Resumiendo:

Nuestro sistema de numeración decimal es **posicional** y de **base diez**. Eso significa:
– que el mayor valor posicional es el de la izquierda;
– que se emplean únicamente diez símbolos diferentes (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9);
– que la variación de posición se realiza en función de potencias de diez.

Ficha 2 **Suma. Resta. Multiplicación y división en N. Propiedad distributiva.**

1.- a) Sean: A = { □; △; ○ } y B = { 1; △; a; f }:

n (A) = ... n (B) = ...
n (A ∪ B) = ...
n (A) + n (B) = ...

b) A = { ▭; ◺; ○ } y B = { a; b; c; d }

n (A) = ... n (B) = ...
n (A ∪ B) = ...
n (A) + n (B) = ...

c) A = { ⬡; ▭; △ } y B = { ⬡; □; ▭; △ }
n (A) = ... n (B) = ...
n (A ∪ B) = ...
n (A) + n (B) = ...

Comparar en cada uno de los casos anteriores los valores de $n(A \cup B)$ y $n(A) + n(B)$. ¿Qué se observa?

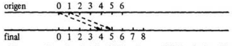
El número de elementos de $A \cup B$, es decir $n(A \cup B)$ es igual a $n(A) + n(B)$ sólo cuando A y B son disjuntos.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) \text{ si } A \cap B = \phi$$

2.- Definamos la relación t de origen N y final N, tal que a cada natural "n" le haga corresponder "4 + n". Trazas las flechas, en el esquema siguiente, que correspondan a los elementos 0, 1, 2, ..., 10 del conjunto origen. ¿Es t una función?

Hallar el conjunto de los naturales que tengan como imagen 9. La misma pregunta sustituyendo 9 por 235. La misma pregunta sustituyendo 9 por 3.

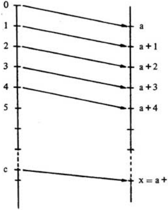
¿Cuáles son los elementos del conjunto final que son imágenes de algún elemento del conjunto inicial? ¿Es t una biyección?



3.- Consideremos ahora la relación $\mathcal{H}$ de origen en NXN y final en N, tal que al par de naturales (a, b) le hace corresponder **a + b**. ¿Cuál es la imagen de (193; 433)? Dar cuatro pares que tengan a 25 como imagen. ¿Es $\mathcal{H}$ una función? ¿Es biyección? Justificar las respuestas.

4.- En el capítulo V analizamos la adición desde el punto de vista estructural. ¿Es ley de composición la suma en N? ¿Tiene elemento neutro? ¿Es asociativa? ¿Es grupo? Explicar las respuestas en cada caso.

5.- Elegir un natural "a". Definir la relación ∪ de N en N, de modo que a cada natural "n" le haga corresponder "a + n". Hacer el diagrama sagital:



¿Cuál es la imagen del 0? Completar el esquema sagital hasta llegar a la imagen del 10. ¿Es U una función? ¿Es biyección? ¿Cuáles son los naturales imagen? (tener en cuenta su relación con "a"). ¿Cuáles son los naturales que no son imagen de ninguno? (tener en cuenta también su relación con "a"). Un natural cualquiera "c" ¿tiene imagen por U en N? Evidentemente por ser función, todo elemento de N tiene imagen en N.

Llamemos "x" a la imagen de "c". ¿Cuánto vale x?

$x = a + c$

Todo esto justifica la siguiente consideración:

> Siendo a y x dos naturales cualesquiera:
> si $x \geqslant a$, entonces existe un natural único que podemos llamar "c" tal que $a + c = x$, y lo escribiremos "$x - a$".
> Si $x < a$ entonces **no existe** ningún natural "c" tal que $a + c = x$

De esta manera llegamos a definir funcionalmente la resta de naturales, y lo que es muy importante, su vinculación con la suma.

6.- Dados los conjuntos:

$A = \{ ma; pa; so \}$

$B = \{ la; ta \}$

representar en un esquema cartesiano AXB. Completar:

n (A) = ...
n (B) = ...
n (AXB) = ...

Para encontrar el número de elementos de AXB, cualquiera de las siguientes maneras es válida:
- contar todos sus elementos;
- sumar 3 + 3;
- sumar 2 + 2 + 2;
- multiplicar 3 x 2;
- multiplicar 2 x 3.

> El número de elementos de AXB es igual al producto del número de elementos de A por el número de elementos de B:
> n (AXB) = n (A) x n (B)
> **Observación**: los dos signos X tienen significados completamente diferentes, uno está ubicado entre conjuntos y el otro entre números.

7.- Consideremos la función de N en N:
$f : x \rightarrow 5x$
- ¿por qué es función?
- ¿todo elemento de N es imagen?
- La relación recíproca R' de f ¿es función? $R'_{(8)}$ = ...
- ¿Es f una biyección de N en N? ¿Por qué?
- ¿Qué subconjunto de N habría que elegir como conjunto de partida de R' para que R' sea función?

Generalizando el ejemplo anterior a la función de N en N:
$f : x \rightarrow ax$

y analizando en ella la imagen de un elemento cualquiera "c" se llega a la siguiente definición:

a y b son dos naturales;
- si "a" es múltiplo de "b", entonces a = b . q
  donde q es el **cociente** a : b
- si "a" no es múltiplo de "b", entonces a = (b . q) + r
  donde q es el cociente; r < b

Este análisis funcional de la multiplicación nos permite ver la división como lo que es: la inversa de la multiplicación.

8.- Sean dos funciones de N en N:

f : x → 3x
g : x → 2x

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

f

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

g

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

a) Trazar en los dibujos anteriores algunas flechas de los esquemas sagitales de estas funciones.

b) Llamemos "h" a la función g o f:

¿Cuál es la imagen de 1 por h? ¿Y de 2? Trazar algunas flechas del esquema sagital de h. Completar:

h : x → ....

c) "q" es la función compuesta f o h. Completar:

q : x → ....

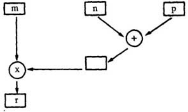
"p" es la función compuesta h o h, completar:

p : x → ....

9.- Analicemos ahora la relación G de N X N en N tal que a cada par (m, n) le hace corresponder mxn. ¿Es función? ¿Es biyección? ¿Es "x" ley de composición de N? Analizar cada una de las propiedades de las leyes de composición. ¿Es x en N un grupo? ¿Por qué?

10.- Estudiaremos ahora otra propiedad importante que vincula la adición con el producto.

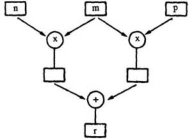
a) En el siguiente esquema reemplazar las letras m, n y p por números, y efectuar las operaciones según lo indican las flechas:



Volcar los datos en la siguiente tabla:

m					
n					
p					
r					

b) Con los mismos datos y según el siguiente esquema, completar la tabla:



m					
n					
p					
r					

Comparar los resultados en las dos tablas, ¿qué se observa? ¿Por qué?

Indicando con paréntesis el orden de las operaciones, tendremos en el primer esquema:

$m \times (n + p)$

y para el segundo:

$(m \times n) + (m \times p)$

es decir:

$m \times (n + p) = (m \times n) + (m \times p)$

> La multiplicación es distributiva con respecto a la adición si, cualesquiera que sean los naturales a, b, c se cumple:
> $a \,.\, (b + c) = (a \,.\, b) + (a \,.\, c)$

La multiplicación ¿es distributiva con respecto a la sustracción? La intersección entre conjuntos ¿es distributiva con respecto a la unión? ¿Y con respecto a la diferencia?

En general:

> Si para dos operaciones (o y $*$) cualesquiera se verifica que
> $a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c)$
> diremos que la operación o se distribuye con $*$.

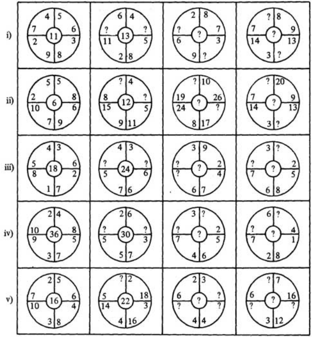
Ficha 3 Ejercicios con números naturales.

Ante la simplicidad del tema operaciones con números naturales, y el interés de plantear ejercicios de todos los contenidos desarrollados, optamos por incluir en esta ficha algunas actividades que nos parecen interesantes por su presentación. Pero ¡atención! En ningún caso se trata de acertijos, sino de búsqueda racional; requiere del lector el empleo de las operaciones con naturales, que no siempre están detalladas...

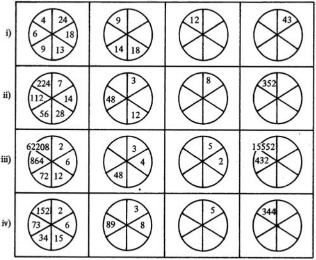
1.- Encontrar los números que faltan:

a) En esta serie de esquemas, cada círculo de un grupo horizontal de cuatro gráficos, tiene la misma "ley" de solución. Esa ley o clave, debe encontrarse analizando exhaustivamente el primer círculo, que presenta datos y soluciones. En todos los casos, el número central rodeado por una línea, es básico.

Por ejemplo, en la línea i) (que tiene 11 en el centro para el primer círculo) cada sector del primer círculo presenta dos números, cuya suma es 11. Los tres círculos siguientes incluyen números que, en un mismo sector, si son sumados dan como resultado el número central. El ejercicio tiene, por lo tanto, dos etapas: la primera es analizar el círculo de la izquierda (que está completo) y descubir la relación operacional entre los números del sector y el centro, la segunda es aplicar la misma relación en los restantes tres círculos y completar los espacios indicados con el signo "?".



b) En esta serie, no se presenta número central, pero hay una (o más) operaciones que permiten pasar de un sector al otro, ¡hay que descubrirla(s)! La rayita gruesa indica el punto de partida; el recorrido del círculo se efectúa en el sentido contrario al de las agujas de un reloj.



Ejemplo: en la fila i) se parte del 4 para llegar al 24, siguiendo el siguiente trayecto:

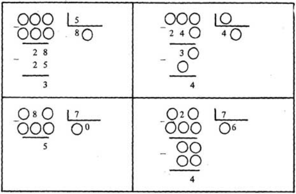
$4 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 13 \rightarrow 18 \rightarrow 24$

¿qué operaciones con naturales se emplearon? Por lo creciente de la serie, sólo es posible sumar, multiplicar o efectuar potencias. ¿Cuál de estas tres operaciones permite pasar del 4 al 6? Claro, sumar 2. ¿Y de 6 a 9? Sí, sumar 3. Es decir que el camino operacionalmente adecuado para recorrer esta primera serie horizontal de círculos es:

$+2 \rightarrow +3 \rightarrow +4 \rightarrow +5 \rightarrow +6$

Aplicar la misma regla en los tres círculos restantes, atendiendo al punto de partida, el sentido antihorario de circulación y los datos numéricos de cada ejemplo.

c) Aquí se presentan cuatro divisiones que hay que completar, ubicando en cada círculo el número adecuado (¡que es único, por supuesto!):



2.- a) – Elegir dos dígitos diferentes, distintos de 0.
– Escribir todos los números de dos cifras, posibles con ellos. Se pueden repetir las cifras. Son cuatro números.
– Calcular la suma S de esos cuatro números.
– Calcular también la suma s de los dos dígitos.
– Calcular el cociente de S por s.
– Hacer otros ejercicios partiendo de otros dos dígitos.
– ¿Qué se observa? ¿Cuál es la explicación?

b) – Elegir dos dígitos diferentes distintos de 0.
Con esas cifras escribir todos los números de tres cifras. Se pueden repetir los dígitos. Son ocho números.
– Calcular la suma S de esos ocho números.
– Calcular la suma s de los dos dígitos.
– Buscar el cociente de S por s.
– Hacer otros ejemplos, con otros pares de dígitos (exceptuando el 0).
– ¿Qué se observa? ¿Cuál es la explicación?

c) – Elegir tres dígitos diferentes, distintos de 0.
Con esos tres dígitos escribir todos los números de tres cifras utilizando para cada número una sola vez cada dígito. Se obtienen seis números.
– Calcular la suma S de esos seis números.
– Sumar los tres dígitos. Esta suma se llamará s.
– Buscar el cociente S : s.
– Hacer otros ejemplos con ternas de dígitos distintos (excepto 0).
– ¿Qué se observa? ¿Cuál es la explicación?

3.- Juego de deducción:

Tres chicos, Alberto, Benito y Cecilia, han juntado sus autitos de colección. Hay Renault, Peugeot, Citroën, Fiat y Ford.

- En total son 88 autitos.
- Benito tiene tantos como Cecilia.
- El número de autos de Alberto es el doble del número de autos de Benito.
- Benito no tiene Ford.
- Cecilia tiene tres Ford más que Alberto.
- Benito tiene tantos Peugeot como Cecilia Ford.
- El número de Peugeot de Alberto es el doble del número de Peugeot de Benito.
- El número de Peugeot de Cecilia es la mitad del número de Peugeot de Alberto.
- Los tres tienen igual cantidad de Renault.
- Benito tiene dos Citroën y cuatro veces más de Fiat.
- El número de Citroën de Cecilia es el doble del número de Citroën de Benito.
- El total de Fiat es 17.
- Entre todos tienen 7 Ford.
- ¿Cuántos autitos de cada marca tiene cada niño?

	Nº de autitos de cada chico	Renault	Peugeot	Citroën	Fiat	Ford
Alberto						
Benito						
Cecilia						
Total						

4.- Resolver los siguientes cálculos teniendo en cuenta que la flecha orientada hacia la derecha, ubicada sobre un natural, indica que se debe trabajar con el siguiente de dicho número y la flecha orientada hacia la izquierda, con el anterior. Ejemplo:

$\overleftarrow{7} + 5 = \overleftarrow{12}$; $\overleftarrow{6} + \overrightarrow{3} = 9$

a) $\overrightarrow{6} + \overleftarrow{4} =$

b) $\overrightarrow{10} + \overleftarrow{7} =$

c) $\overrightarrow{9} - \overleftarrow{9} =$

d) $\overrightarrow{7} - \square = \overleftarrow{4}$

e) $\overrightarrow{3} + \overrightarrow{\square} = \overrightarrow{10}$

f) $\overrightarrow{\square} - \overleftarrow{\square} = 2$

g) $\overrightarrow{6} \times \square = \overleftarrow{29}$

h) $\overrightarrow{\square} \times \overleftarrow{\bigcirc} = \overrightarrow{53}$

i) $\overrightarrow{\square} \times \overleftarrow{\square} = \overleftarrow{\square \times \square}$

Atención: Si en una misma ecuación las figuras de las incógnitas son iguales, deben ser reemplazadas por un mismo número. Si son distintas, por números diferentes.

5.- Sea el conjunto E:

$$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

a) Escribir por extensión el conjunto D de los elementos de E que son múltiplos de 2.

b) Escribir por extensión el conjunto T de los elementos de E que son múltiplos de 3.

Colocar los elementos de E en un diagrama de Venn y después en un diagrama de Carroll (teniendo en cuenta destacar los subconjuntos D y T).

c) Escribir por extensión $D \cap T$; $D \cup T$; $D \Delta T$.

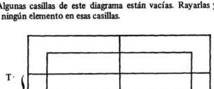
Escribir por extensión el conjunto S de los elementos de E que son múltiplos de 6.

¿Qué igualdad puede escribirse utilizando los conjuntos S, D y T?

d) Escribir por extensión el conjunto F de los elementos de E que son múltiplos de 4. Comprobar que F es subconjunto de D. Representar en un diagrama de Venn el conjunto E y las dos partes D y F.

e) Colocar en el diagrama de Carroll siguiente los elementos de E. ¿Qué puede decirse de los elementos de $F \cap T$?

Algunas casillas de este diagrama están vacías. Rayarlas y explicar por qué no hay ningún elemento en esas casillas.



6.- Dados:

X : conjunto de los múltiplos de 10 menores que 69.

Y : conjunto de los múltiplos de 15 menores que 69.

Z : conjunto de los múltiplos de 5 menores que 69.

a) Escribir por extensión los conjuntos siguientes:

$X, Y, Z, X \cap Y, X \cap Z, Y \cap Z, X \cap Y \cap Z.$

b) ¿Cuál es el menor múltiplo común a 10, 15 y 5, distinto de 0?

7.- El conjunto D_8 de los divisores de 8 se escribe:

$$D_8 = \{1; 2; 4; 8\}$$

a) Escribir por extensión los conjuntos D_{15}, D_{30}, D_{45} y D_{60}.

b) ¿Qué inclusiones pueden escribirse entre algunos de estos conjuntos?

c) De las frases siguientes ¿cuáles son verdaderas? Explicar cada vez la respuesta:

"Todo divisor de 15 es divisor de 30".

"Algunos de los divisores de 30 no son divisores de 60".

"El natural 1 no es un divisor común a 30, 60 y 45".

"Todo divisor de 60 es divisor de 15".

d) Llamemos E al conjunto de todos los naturales de 0 a 65. Dibujar un diagrama de Venn para representar E y los subconjuntos D_{15}, D_{30}, D_{45} y D_{60}.

e) Escribir por extensión $D_{15} \cap D_{30}$; $D_{15} \cap D_{60}$; $D_{45} \cap D_{60}$. ¿Cuál es el mayor divisor común a 15 y 30? ¿Cuál es el mayor divisor común a 45 y 60? ¿Cuál es el menor divisor común a 15 y 30? ¿Y a 45 y 60?

Ficha 4 Concepto de número entero. Operaciones en Z.

1.- **Juego de las fichas:**

a) Vamos a jugar entre compañeros. Se necesitarán cartoncitos de dos colores (amarillo y rojo, por ejemplo). Sobre cada cartoncito amarillo se escribe un natural (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...) idem sobre cada cartoncito rojo.

Preparar una cuadrícula del tipo de la siguiente, que tenga unas diez líneas:

$\longleftarrow$ sentido rojo sentido amarillo $\longrightarrow$

	6R	5R	4R	3R	2R	1R	salida	1A	2A	3A	4A	5A	6A	par sacado
														(5 ;3)

b) Regla del juego: el que empieza coloca una ficha en la casilla de salida. Saca primero un cartón amarillo y después un cartón rojo. Supongamos que en el cartón amarillo había un 5 y en el cartón rojo un 3. Movemos la ficha 5 casillas según el sentido amarillo –sin contar la casilla de salida– colocándolo en la casilla 5A; a partir de la casilla 5A, movemos la ficha 3 casillas según el sentido rojo. La ficha se hallará, en definitiva, en la casilla 2A. Dejamos la ficha en esta casilla y anotamos en el extremo de la línea correspondiente el par (5; 3).

Ponemos de nuevo en juego los cartoncitos sacados. El otro jugador vuelve a empezar con otra ficha, siempre a partir de la salida, efectuando el movimiento que sus cartones le indiquen y anotando el "par sacado" en el casillero respectivo, y así sucesivamente hasta que todas las líneas del cuadro estén llenas.

Atención: no confundir el par (5 ; 3) que coloca la ficha en la casilla 2A con el par (3 ; 5) que la colocaría en la casilla 2R.

c) Cuando la columna del "par sacado" esté completa, se reúnen todos los resultados hallados en la clase. Anotar en una misma tarjeta todos los pares que colocan la ficha en la casilla 2A.

Los pares como (4 ; 4), (6 ; 6), ...estarán en una misma tarjeta que se puede llamar 0R. ¿Cómo podría llamarse también? A partir de ahora la llamaremos simplemente 0.

Con los cartones fabricados, ¿han aparecido en la clase todas las parejas posibles? Completar las tarjetas imaginando los pares que faltan.

De haberse tenido más cartoncitos se hubieran escrito otros pares en las tarjetas y se hubieran obtenido otras tarjetas. ¿En qué tarjeta se escribiría el par (124 ; 127)? ¿Y el par (62 ; 45)? ¿Cuál es el segundo término del par (67 ;   ) sabiendo que está escrito en la tarjeta 13R?

Buscar en cada tarjeta el par que conduce la ficha a la casilla correspondiente por el camino más corto. Enmarcar este par. Para la tarjeta 3R es el par (0 ; 3). ¿Qué par será para la tarjeta 4A? ¿Para la tarjeta 0? ¿Cuál es el nombre de la tarjeta que tiene enmarcado el (x ; 0)? ¿Cuál es el nombre de la tarjeta que tiene enmarcado el (0 ; y)? ¿Cuál es el nombre de la tarjeta que tiene enmarcado el par (0 ; 0)?

2. Juego de las casas:

a) Recortar sobre una cartulina unos 20 cuadrados y también unos 20 triángulos. Con un cuadrado y un triángulo se puede formar una casa.

Tomar al azar, sin contarlos, cuadrados y triángulos y formar tantas casas como se pueda. Por ejemplo, si se han tomado 3 cuadrados y 4 triángulos se forman 3 casas y queda un triángulo. Escribir el par (3 ; 4) en la tarjeta llamada 1T. Si se han tomado 11 cuadrados y 5 triángulos, se forman 5 casas y quedan 6 cuadrados. Escribir el par (11 ; 5) en la tarjeta llamada 6C; escribir otros pares en esta tarjeta. Formar también las tarjetas llamadas 1C, 2C, 3C, ... y las llamadas 2T, 3T, ...

3. Juego del guarda:

El guarda de un colectivo de la línea Neuquén-Bahía Blanca cuenta los pasajeros antes de llegar a Choele-Choel. Después de haber parado en Choele-Choel, vuelve a contar los pasajeros y anota en su libreta "3 más". Puede ser que hayan subido 5 pasajeros y que bajaran 2. Esta suposición posible se escribirá mediante el par (5 ; 2). ¿Habría alguna otra suposición posible que nos conduzca a anotar "3 más"? ¿Cuáles? Anotar los pares correspondientes en la tarjeta llamada "3 más". Compararla con una de las otras del juego de las fichas o del juego de las casas. ¿En qué caso se obtendría el par (2 ; 5)? ¿Qué anotaría el guarda? ¿Qué pares nos conducen a la misma conclusión? Resumir esto en una ficha. ¿Cuál es la ficha correspondiente en el primer juego? ¿Y en el juego de las casas?

4.- Comparar la tarjeta 3A del primer juego, la tarjeta 3C del juego de las casas y la tarjeta "3 más" del guarda. Todas contienen los mismos pares. Una sola tarjeta puede sustituir a las tres; la llamaremos "3^+".

Del mismo modo, las tarjetas llamadas 3R, 3T y "3 menos" se podrán sustituír por una sola tarjeta llamada "3^-". Las tarjetas 5R, 5T y "5 menos" pueden sustituirse por una sola tarjeta llamada "5^-", etc.

5.- Considerar estos pares de naturales: (16 ; 13), (7 ; 4), (3 ; 0), (4 ; 1), (5 ; 2). Tienen todos una propiedad común; el primer término es superior al segundo y la diferencia es 3. Son pares (a ; b) tales que: $a - b = 3$.

No escribiremos todos los pares que tengan esta propiedad, pero podemos imaginar el conjunto que forman: es infinito y lo designaremos por "3^+".

$$3^+ = \{ (3 ; 0), (4 ; 1), (5 ; 2), (6 ; 3), (7 ; 4), \ldots, (125 ; 122), \ldots \}$$

3^+ es *un entero.*

6.- Damos ahora un cuadro para representar algunos elementos del conjunto N X N. Los pares escritos entre corchetes conducen al mismo entero, ¿cuál? La misma pregunta para los pares entre paréntesis

4			(2 ; 4)		
3		(1 ; 3)			
2	(0 ; 2)				[4 ; 2]
1				[3 ; 1]	
0			[2 ; 0]		
	0	1	2	3	4

Escribir en el cuadro algunos pares que sean elementos de 3^-, algunos de 0 y algunos de 4^+.

Definimos así el conjunto N X N de los pares de naturales, una relación que llamaremos &.

(a ; b) & (a' ; b') significa que (a ; b) y (a' ; b') son elementos del mismo entero.

Esta relación permite clasificar todos los pares: obtenemos una partición de N X N. & es una relación de equivalencia. *Cada clase es un entero.*

7.- El conjunto $Z = \{ 0, 1^+, 1^-, 2^+, 2^-, 3^+, 3^-, \dots \}$ se llama conjunto de los enteros.

El conjunto $Z^+ = \{ 0, 1^+, 2^+, 3^+, \dots \}$ se llama conjunto de los enteros positivos.

El conjunto $Z^- = \{ 0, 1^-, 2^-, 3^-, \dots \}$ se llama conjunto de los enteros negativos.

Completar:

$Z^+ \cap Z^- =$ .... ; $Z^+ \cup Z^- =$ ....

8.- En el juego de las fichas, jugar dos veces seguidas. Si se saca primero (4 ; 6) la ficha se mueve 4 casillas según el sentido amarillo, después 6 casillas en el sentido rojo, llegando a la casilla 2R. Si después se saca (5 ; 2) la ficha se desplaza 5 casillas según el sentido amarillo y después dos casillas según el sentido rojo. Llega en definitiva a la casilla 1A.

Después de la primera jugada, la ficha se desplazó 4 casillas según el sentido amarillo, después de la segunda jugada se desplazó 5 casillas según el sentido amarillo. Después de la primera jugada la ficha se desplazó 6 casillas según el sentido rojo, después de la segunda jugada se desplazó 2 casillas según el sentido rojo. Si la ficha se hubiese desplazado 9 casillas según el sentido amarillo y después 8 según el sentido rojo, o sea como si hubiese sacado el par (9 ; 8) jugando una sola vez, ¿en qué casilla se encontraría ahora?

(4 ; 6) y luego (5 ; 2) puede sustituírse por (9 ; 8).

(4 ; 6) se encuentra en la tarjeta 2^-;

(5 ; 2) pertenece a la tarjeta 3^+;

(9 ; 8) pertenece a la tarjeta 1^+.

Elegir otro par de la tarjeta 2^- distinto al (4 ; 6) y después otro de la tarjeta 3^+, distinto al (5 ; 2) y jugar como en el párrafo anterior.

Empezar de nuevo dos o tres veces eligiendo siempre un par en la tarjeta 2^- y un par en la 3^+ y resumir los resultados en el cuadro siguiente:

Sustituímos	por	que pertenece a la tarjeta
(4 ; 6) después (5 ; 2)	(9 ; 8)	1^+

Para resumir estos resultados se puede escribir:

$2^- + 3^+ = 1^+$

y decir que la suma de los enteros 2^- y 3^+ es 1^+.

En general, para sumar dos pares de naturales (a ; b) y (c ; d) haremos

$(a ; b) + (c ; d) = [(a + c) ; (b + d)]$

9.- a) Jugar dos veces seguidas al juego de las fichas. Sacar primero (5 ; 2) y después (4 ; 6) ¿dónde se encuentra finalmente la ficha? Si se hubiese sacado primero (4 ; 6) y después (5 ; 2) ¿dónde se encontraría la ficha?

Siendo a y b enteros cualesquiera, $a + b = b + a$.

La suma en Z es conmutativa.

b) Si se saca, al jugar dos veces seguidas, (1 ; 5) y después (2 ; 2) ¿dónde se encontraría la ficha finalmente? Se puede resumir esto poniendo:

$4^- + 0 = 4^-$

Si se hubiese sacado (2 ; 2) y después (1 ; 5) ¿cómo se habría resumido?

Buscar en el conjunto Z los enteros x tales que:

$x + 0 = x$ y $0 + x = x$

¿qué se observa? Diremos que $\cup$ **es el elemento neutro para la suma de los enteros.**

c) Completar:

$7^- + 7^+ =$ ....

$5^+ + 5^- =$ ....

$3^+ + 3^- =$ ....

Dos enteros cuya suma es 0 se llaman enteros opuestos o simétricos.

El opuesto o simétrico de b se anotará "op (b)". Todo entero tiene un opuesto y sólo uno:

$b + op (b) = 0$

d) Completar estos cálculos en Z:

$(3^+ + 7^-) + 6^+ =$ ....

$3^+ + (7^- + 6^+) =$ ....

¿Qué se verifica?

Siendo a, b y c enteros cualesquiera:

$(a + b) + c = a + (b + c)$

La suma en Z es asociativa.

10.- Resumiendo:

Suma en N	**Suma en Z**
Es conmutativa.	Es conmutativa.
Es asociativa.	Es asociativa.
0 es el elemento neutro.	0 es el elemento neutro.
Sólo 0 tiene simétrico.	Todo entero b tiene un simétrico:
$0 + 0 = 0$	$b + op (b) = 0$

Analizadas las propiedades de la suma en Z vemos que es grupo. ¿Por qué?

11.- a) Si "a" designa 7^-, y $a = b$. ¿qué designará b?

En Z, $a = b$ significa: a y b designan el mismo entero.

b) Si $a = b$ y si "a" designa 9^-, ¿qué designa $a + 3^+$? ¿y $b + 3^+$?

Completar:

si $a = b$, entonces $a + 3^+ \ldots b + 3^+$

a, b, c representan enteros cualesquiera:

si $a = b$, entonces $a + c = b + c$

La igualdad $a = b$ nos lleva a una nueva igualdad si añadimos el mismo entero de un lado y otro del signo igual.

12.- a) Sea una igualdad: $x + 7^+ = y + 7^+$

Utilizar la propiedad anterior; añadiendo el mismo entero a uno y otro lado del signo "igual", se obtiene una nueva igualdad. Añadamos op (7^+), es decir 7^-:

$$x + 7^+ + 7^- = y + 7^+ + 7^-$$

Se obtiene la nueva igualdad:

$$x + \ldots = y + \ldots$$

Es decir:

$$x = \ldots$$

b) De modo más general, sea la igualdad:

$$x + z = y + z$$

Añadimos op (z):

$$x + z + \mathrm{op}\,(z) = y + z + \mathrm{op}\,(z)$$

Se obtiene:

$$x + \ldots = y + \ldots$$

Se obtiene, pues, la igualdad:

$$x = \ldots$$

x, y, z representan enteros cualesquiera:

si $x + z = y + z$, entonces $x = y$

Se dice que **se ha simplificado por z.**

$$\begin{tikzcd} & \boxed{a = b} \arrow[dr] & \\ \boxed{a + 0 = b + 0} \arrow[ur] & \text{¡En Z!} & \boxed{a + c = b + c} \arrow[dl] \\ & \boxed{a + c + \mathrm{op}\,(c) = b + c + \mathrm{op}\,(c)} \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

13.- Sea una ecuación en Z: $3^+ + x = 2^-$

Se tiene la igualdad . . . .: $3^+ + x = 2^-$

Añadiendo op (3^+), es decir, 3^- . . .: $3^- + 3^+ + x = 3^- + 2^-$

Se obtiene la igualdad . . . .: $0 + x = 5^-$

De donde . . . .: $x = 5^-$

El **único entero** que puede ponerse en el sitio de x para obtener una frase verdadera, es el entero 5^-.

En Z, el conjunto de las soluciones de esta ecuación es el conjunto unitario $\{5^-\}$.

14.- Buscar el conjunto de soluciones para cada una de las ecuaciones siguientes:

$4^+ + t = 7^-$
$u + 5^- = 2^- + 3^+$
$v + 6^- + 1^+ = 7^+$
$5^+ + w + 1^+ = 6^+$
$x + op(x) = 0$
$x + op(x) = 2^+$
$x + 4^+ = 2^+ + x$

15.- a) La ecuación $x + 3^- = 5^+$
o sea: $x + 3^- + op(3^-) = 5^+ + op(3^-)$
nos da la ecuación: $x = 5^+ + op(3^-)$.

En general: la ecuación $x + a = b$, o sea $x + a + op(a) = b + op(a)$ nos da la ecuación $x = b + op(a)$ (se escribe "$b - a$"). Es decir:
$b + op(a) = b - a$
Se obtiene de esta manera la resta en Z.

b) Completar:
$5^- - 2^- =$ .... $2^- - 5^- =$ ....
¿La resta es conmutativa en Z?
Completar:
$(8^+ - 4^-) - 2^+ =$ .... ; $8^+ - (4^- - 2^+) =$ ....
Comparar estos resultados. La resta en Z ¿es asociativa?
Completar:
$8^- - 0 =$ .... ; $0 - 8^- =$ ....
El entero 0 no es elemento neutro para la resta.

16.- a) Estudiamos ya la suma en Z. Amplía la suma en N. La igualdad $3 + 5 = 8$ es verdadera tanto en Z como en N. Conserva las propiedades de la suma en N: la suma en N es asociativa y conmutativa, ocurre lo mismo para la suma en Z.

El natural 0 es elemento neutro para la suma en N; el entero 0 es elemento neutro para la suma en Z.

Del mismo modo vamos a inventar una multiplicación en Z. Debe ampliar la multiplicación en N. Debe conservar las propiedades de la multiplicación en N.

– Sea un producto de dos naturales $3 \times 5 = 15$. Esta igualdad es verdadera en N. Se tiene igualmente en Z^+ : $3^+ \times 5^+ = 15^+$
Sabemos entonces multiplicar dos enteros positivos.

– La multiplicación en N es conmutativa. La multiplicación en Z será también conmutativa.

– Sabemos multiplicar un natural por 0. Completar: $3 \times 0 =$ . . . . ; $0 \times 5 =$ . . . . . . Igualmente el producto de un entero cualquiera por 0 es 0.

– En N la multiplicación es distributiva respecto a la suma:

siendo a, b, c naturales cualesquiera:

$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

Ocurre lo mismo para la multiplicación en Z:

siendo a, b, c enteros cualesquiera:

$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

b) Sabemos que $3^+ \times 5^+ = 15^+$ pero todavía no sabemos calcular $3^+ \times 5^-$.

Si designamos por "u" a "$3^+ \times 5^+$" y por "v" a "$3^+ \times 5^-$", calcular u + v:

$u + v = (3^+ \times 5^+) + (3^+ \times 5^-)$

$u + v = 3^+ \times (\ldots + \ldots)$

$u + v = 3^+ \times 0$

$u + v = 0$

Este cálculo demuestra que v es el opuesto de u:

$v = op\,(u)$ o también $3^+ \times 5^- = op\,(3^+ \times 5^+)$

Calcular:

$5^+ \times 1^- = \ldots\ldots\ldots$;	$2^+ \times 51^- = \ldots\ldots\ldots$;	$2^- \times 51^+ = \ldots\ldots\ldots$
$1^- \times 5^+ = \ldots\ldots\ldots$;	$51^- \times 2^+ = \ldots\ldots\ldots$;	$51^+ \times 2^- = \ldots\ldots\ldots$

c) Ahora sabemos calcular $3^+ \times 5^-$, pero no sabemos calcular todavía $3^- \times 5^-$.

Siendo:

$x = 3^- \times 5^-$

$y = 3^- \times 5^+$

Completar:

$x + y = (3^- \times 5^-) + (3^- \times 5^+)$

$x + y = 3^- \times (\ldots + \ldots)$

$x + y = 3^- \times \ldots$

$x + y = \ldots$

$3^- \times 5^- = op\,(3^- \times 5^+)$

$3^- \times 5^- = \ldots$

En resumen:

$3^+ \times 5^+ = 15^+$	$3^- \times 5^+ = 15^-$
$3^- \times 5^- = 15^+$	$3^+ \times 5^- = 15^-$

Ficha 5 Ejercicios con números enteros.

El lector habrá observado que utilizamos una manera diferente para designar los enteros. Las expresiones 5^+, 11^-, 7^-, 3^+, etc., reemplazan a las habituales de +5, −11, −7, +3, etc.

Hemos decidido emplear esa forma de escritura (que no es idea original nuestra) por razones fundamentalmente pedagógicas. Se produce una pronunciada separación (que tiende a evitar confusiones) entre el signo de la operación a efectuar y el signo del número a operar. Se reduce la presencia de paréntesis.

Estas afirmaciones no son sólo el resultado de un manejo de hipótesis pedagógico-didácticas emitidas por docentes que dialogan sobre las dificultades del aprendizaje del tema por parte de sus alumnos. Hemos participado en clases piloto donde se trabajaba con esa nomenclatura (en Francia, Alemania, Canadá, España e Italia) y comprobado cómo podían reducirse algunos de los inconvenientes que habitualmente encuentran los estudiantes para dominar el trabajo con enteros.

Los mismos resultados obtuvimos en cursos de matemática en los Institutos de Formación Docente de la provincia de Río Negro, en los cuales los alumnos-maestros nos explicaban, desde su punto de vista de aprendices, las ventajas que producía un simple cambio de designación. Finalmente probamos, en 1979, el tratamiento del tema con los alumnos del séptimo grado piloto-experimental del Grupo de Psicomatemática que dirigimos, también con observaciones muy alentadoras en cuanto al dominio del tema, empleando la nomenclatura que optamos por incluir también en este trabajo.

Pero ¡atención! Un sólo cambio de denominación no puede producir milagros. Debe incluirse en un proceso metodológicamente bien fundamentado y realimentado de continuo en función de las experiencias recogidas. Justamente éstas nos indican la conveniencia de dedicar más tiempo y esfuerzos a la introducción del concepto de número entero y a la fundamentación de las operaciones y sus propiedades. Creemos que si esto se logra, la habilidad y dominio del cálculo llegan racionalmente.

En los ejercicios de los apartados 1, 4, 11 y 12 de esta ficha presentamos (como ejemplo que el lector podrá extender a todo lo expresado en esta ficha) la designación de los números enteros tanto en la notación que hemos adoptado, como en la habitualmente utilizada para ellos.

1.- En un cuadrado mágico, se obtiene el mismo número al sumar los elementos de una misma fila, de una misma columna o de una diagonal. Completar el siguiente cuadrado mágico: (con las dos notaciones)

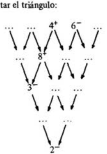
23^-			10^-
16^-	11^-		13^-
		8^-	19^-
9^-		15^-	63^+

-23			-10
-16	-11		-13
		-8	-19
-9		-15	$+63$

2.- El triángulo siguiente presenta "casillas" en blanco, que deben completarse con el número adecuado que permita llegar exactamente al "vértice inferior". Este esquema presenta números vinculados entre sí por la siguiente regla:

$$\begin{array}{ccc} a & & b \\ & a-b & \end{array}$$

Completar el triángulo:



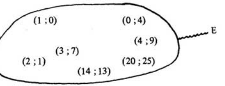
3.- E es un conjunto de pares de naturales.

Completar: E ... N X N

Sean a, b, c, d, naturales, términos de los pares que son elementos de E. Definamos en E la relación $\mathcal{R}$ de la siguiente forma:

$(a\,;b)\ \mathcal{R}\ (c\,;d)$ significa $a + d = b + c$

Dibujar el esquema sagital de $\mathcal{R}$. ¿Es $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia?



4.- Resolver cada una de las ecuaciones siguientes, indicando cada vez el conjunto de las soluciones:

(nomenclatura de la Guía)	(nomenclatura habitual)
$10^- + x - 2^+ = 6^-$	$-10 + x - (2) = -6$
$10^- - x = 2^+ - 6^-$	$-10 - x = 2 - (-6)$
$\text{op}\,(x) + 6^- = 4^+ + 1^-$	$(-x) + (-6) = 4 + (-1)$
$6^+ + x + \text{op}\,(x) = 4^+ - 2^-$	$6 + x + (-x) = 4 - (-2)$
$u + 3^+ - 2^+ = \text{op}\,(u) - 5^+ + 6^+$	$u + 3 - (2) = (-u) - 5 + 6$
$\text{op}\,(a + 2^-) = 4^+$	$-[a + (-2)] = 4$

5.- Sea $\square \geqslant \Delta$ y los pares de enteros $(2^+ ; 3^-), (1^- ; 4^-), (0 ; 5^-), (6^- ; 2^-)$:

a) ¿Cuáles de estos pares al colocarlos en lugar de $(\square ; \Delta)$ dan una frase verdadera? Elegir uno. Dando a **m** valor 5^+, calcular:

$m \times \square$ y $m \times \Delta$

Completar mediante $\geqslant$ o $\leqslant$:

$m \times \square$ ... $m \times \Delta$

b) Empezar de nuevo, dando a "m" el valor de 5^-.

c) Resolver otra vez estos dos ejercicios tomando otro de los pares hallados en a).

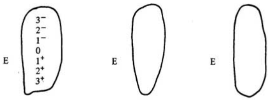
6.- El conjunto E es un subconjunto de Z:

$$E = \{3^- ; 2^- ; 1^- ; 0 ; 1^+ ; 2^+ ; 3^+\}$$

La relación $\mathcal{R}$en E está definida por "es el opuesto de".

a) Dibujar el esquema sagital de $\mathcal{R}$. ¿Es reflexiva esta relación? ¿Es simétrica? ¿Es antisimétrica? ¿Es transitiva? Esta relación ¿es una función de E en E? ¿Es una biyección en E?

b) Utilizar los dibujos siguientes para trazar el esquema sagital de la relación compuesta $\mathcal{R}$ seguida de $\mathcal{R}$.



Para esta relación compuesta ¿qué se puede decir de la imagen de un elemento de E?

7.- Tomando como dato el mismo conjunto E del apartado anterior, dibujar los esquemas cartesianos de las relaciones siguientes en E: "$\leqslant$", "$<$" y "$\geqslant$".

Escribir el conjunto de pares ordenados de cada una de las relaciones que llamaremos G, $\mathcal{H}$ y K respectivamente.

Sea P el producto cartesiano E X E. ¿Qué puede decirse de $\mathcal{H} \cup K$? ¿Y de $G \cap K$? ¿Y de $G \cap \mathcal{H}$? ¿Y de $\mathcal{H} \cap K$?

8.- Consideremos el conjunto $S = \{3^- ; 2^- ; 1^- ; 0 ; 1^+ ; 2^+ ; 3^+\}$

Sea la relación:

$G : y \to y + 3^+$

de origen en S y de final en B formado por el conjunto de las imágenes por G de los elementos de S.

Para cada elemento "y" de S, calcular $y + 3^+$.

Dibujar el diagrama cartesiano de la relación G. .

Considerar otra relación:

$\mathcal{H} : y \to y - 3^+$

de origen en S y final en C, formado por el conjunto de las imágenes por $\mathcal{H}$ de los elementos de S.

Para cada elemento "y" de S calcular $y - 3^+$.

Dibujar el diagrama cartesiano de la relación $\mathcal{H}$.

9.-Con el fin de comparar sus aptitudes deportivas, cuatro muchachos de la misma edad: Pedro, Juan, Enrique y Luis, deciden realizar cada uno cuatro pruebas: salto de altura, carrera de velocidad, lanzamiento de peso y subida de la cuerda.

Para cada una de ellas pueden obtener puntos de bonificación, si el resultado conseguido es superior al resultado promedio de su edad (resultado indicado en un baremo oficial); pueden perder puntos (por penalización) si el resultado conseguido es inferior al resultado medio.

Estos son los resultados: (las bonificaciones están indicadas con un número subrayado, las penalizaciones con un número encerrado en un círculo):

	Pedro	Juan	Enrique	Luis	Pedro y Juan	Enrique y Luis
Salto de altura	$\underline{3}$	②	$\underline{1}$	⑥		
Carrera de velocidad	①	②	$\underline{5}$	$\underline{2}$		
Lanzamiento de peso	$\underline{2}$	$\underline{4}$	$\underline{3}$	①		
Subida a la cuerda	$\underline{4}$	$\underline{1}$	$\underline{2}$.	$\underline{1}$		
Total de puntos buenos	$\underline{9}$					
Total de puntos malos	①					
Par que resume las dos últimas filas	(9;①)					
Número entero representado por este par	8^+					

a) Completar las columnas referentes a Juan, Enrique y Luis.

b) ¿Qué pares hubiesen podido dar 8^{+}? ¿Y 4^{-}?

c) Estos muchachos deciden después hacer una clasificación por equipos de dos. Pedro y Juan por un lado y Enrique y Luis por otro. Completar la parte inferior de las últimas columnas de la tabla.

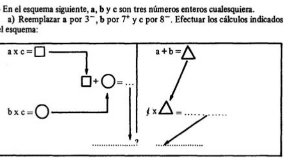
d) Estos cuatro muchachos forman luego un equipo de cuatro (es el equipo nº 1). Siguiendo el mismo sistema, cuatro muchachos de otro equipo (equipo nº 2) obtuvieron respectivamente los resultados: 6^{-}, 5^{+}, 3^{-} y 1^{+}.

Cuatro muchachos de un tercer equipo consiguieron respectivamente los resultados: 1^{-}, 3^{+}, 7^{+} y 2^{-}.

¿Qué equipo es el más fuerte? ¿Y el más flojo? Justificar las respuestas.

10.- En el esquema siguiente, **a**, **b** y **c** son tres números enteros cualesquiera.

a) Reemplazar **a** por 3^{-}, **b** por 7^{+} y **c** por 8^{-}. Efectuar los cálculos indicados en el esquema:



¿Qué signo corresponde ubicar donde está el de interrogación?

b) Repetir el ejercicio cambiando los valores asignados a **a**, **b** y **c**.

c) ¿Qué propiedad ejemplifica este ejercicio?

11.- Completar la tabla siguiente:

a) Empleando la nomenclatura de estas Guías para los números enteros:

a	b	c	(a + b) . c	a + b . c	a . b + c	a . b . c
2^{-}	6^{+}	3^{-}				
12^{-}		8^{+}	24^{+}			
1^{+}		3^{+}	0			
45^{-}	29^{+}			13^{+}		
7^{-}	2^{+}					84^{+}

b) Empleando la nomenclatura habitual de los números enteros:

a	b	c	(a + b) . c	a + b . c	a . b + c	a . b . c
−2	6	−3				
−12		8	24			
1		3	0			
−45	29			13		
−7	2					84

12.- a) Completar el siguiente cuadrado mágico de multiplicación. El producto de los elementos de cada columna, de cada fila y de cada diagonal es fijo, y en este ejemplo ese valor constante de producto es 4096^- (o −4096).

i) nomenclatura Guías

128^-		8^+
1^+		

ii) nomenclatura habitual

−128		8
1		

b) Al completar cuadrados mágicos se realizan numerosos cálculos (¿exactamente cuántos en el cuadrado de 9 casilleros?) y se aplican la operación directa (en este caso multiplicación) y su inversa (en este caso la división). El lector descubrirá rápidamente que se trata de un recurso didáctico sencillo pero muy eficaz para la ejercitación del cálculo.

Resolver el siguiente cuadrado mágico de producto de enteros:

i) nomenclatura Guías

	12^+	
	48^+	
	192^+	6^-

ii) nomenclatura habitual

	12	
	48	
	192	−6

Ficha 6 Concepto de número racional. Operaciones en Q. Conjunto de decimales.

1.- El lector conoce expresiones numéricas como $\frac{3}{4}$, $\frac{8}{2}$, $\frac{1}{9}$. Esos números pueden considerarse como pares ordenados (3 ;4), (8 ; 2), (1 ; 9) en los cuales el primer elemento del par es el numerador, y el segundo el denominador. Sería, esta última, otra manera de escribirlos, pero que no altera, en absoluto, el concepto de número racional ya visto en primaria y secundaria.

En general: $\frac{a}{b}$ puede escribirse (a ; b), siendo **a** un elemento cualquiera de Z y **b** un elemento cualquiera de Z, **excepto 0.**

$\frac{5}{8}$ representa el mismo número que (5 ;...)

$\frac{-7}{3}$ representa el mismo número que (... ; 3)

$\frac{\cdots}{\cdots}$ representa el mismo número que (11 ; 17^-)

$\frac{9}{9}$ representa el mismo número que (... ;...)

$\frac{-4}{\cdots}$ representa el mismo número que (... ; 13^-)

$\frac{12}{48^-}$ representa el mismo número que (... ;...)

2.- En una clase de 24 alumnos, están presentes hoy las $\frac{2}{3}$ partes.

¿Cuántos alumnos son? ¿Cómo se procede para resolver este problema? Efectivamente, a 24 se lo multiplica por 2 y luego se divide el resultado por 3, o bien se lo divide por 3 y al cociente se lo multiplica por 2. Las $\frac{2}{3}$ partes de 24 es 16.

Este ejemplo nos permite enfocar a las fracciones como combinación de dos operaciones: producto (en el numerador) y división (en el denominador).

$24 \to \times 2 \to : 3 \to 16$

$24 \to : 3 \to \times 2 \to 16$

o, resumiendo:

$24 \to \times \frac{2}{3} \to 16$

a) ¿Cuánto es $\frac{4}{5}$ de 100? Expresarlo mediante combinación de operaciones:

$100 \to \times \frac{4}{5} \to ?$

$100 \to \times \ldots \to : \ldots \to ?$

b) ¿Qué parte fraccionaria de 32 es 20?

$32 \rightarrow ? \rightarrow 20$

¿Hay una sola fracción que, aplicada a 32, dé por resultado 20?

3.- Veremos ahora una relación de oquivalencia que el lector seguramente habrá encontrado desde la escuela primaria y que tal vez no ha analizado de esta manera.

Consideremos una bolsa con 20 bolitas; sacar los $\frac{2}{5}$ o los $\frac{4}{10}$ es lo mismo, en ambos casos se sacarán 8 bolitas. Se dice que las fracciones $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{10}$ son "equivalentes". No son iguales, teniendo en cuenta que una fracción es un par ordenado de enteros...

Analicemos en el conjunto de las fracciones la relación F: "es equivalente a". ¿Es una relación de equivalencia? ¿Por qué?

4.- La clase de equivalencia de la fracción $\frac{2}{5}$ es el conjunto:

$$\left\{ \frac{2}{5}; \frac{4}{10}; \frac{14}{35}; \frac{8}{20}; \ldots\ldots\ldots\ldots \right\}$$

Esta clase se indica:

$$\left[\frac{2}{5}\right]$$

que es un "*número racional*" o simplemente "*un racional*".

¿Cómo se escribe la clase de la fracción $\frac{4}{10}$? ¿Qué elementos tiene? ¿Se puede escribir $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$? ¿Por qué?

¿Es verdadero $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$?

En la práctica esta igualdad se escribe abusivamente, pues las fracciones $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{10}$ no son iguales sino equivalentes.

El racional $\frac{2}{5}$ sí es igual al racional $\frac{4}{10}$.

¿Cuál es la diferencia entre fracción y racional?

5.- Elegir una fracción, por ejemplo $\frac{7}{2}$, multiplicar por 3 su numerador y su denominador. La fracción ¿ha cambiado? El racional correspondiente ¿ha cambiado?

Contestar las mismas preguntas cambiando 3 por un natural **no nulo** cualquiera.

6.- Definiremos ahora en forma general la relación F del apartado 3: sean dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ (a y c son enteros, b y d dos enteros no nulos), por lo visto en el apartado 5:

$$\frac{a}{b} \; F \; \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \qquad \text{y} \qquad \frac{c}{d} \; F \; \frac{b \cdot c}{b \cdot d}$$

¿En qué condiciones $\frac{a \cdot d}{b \cdot d}$ y $\frac{b \cdot c}{b \cdot d}$ son equivalentes?

De allí se deduce que:

$\frac{a}{b}$ F $\frac{c}{d}$ sí y solamente si $a \cdot d = b \cdot c$

7.- En esta ficha hemos presentado los números racionales de tres maneras distintas: como par ordenado, como combinación de operadores y como clase de equivalencia. Por razones de comodidad y uso habitual seguiremos hablando de números racionales, pero sin olvidarnos de la amplitud que el concepto tiene.

Se llama "Q" el conjunto de los racionales, que incluye a Z y por lo tanto a N:

$$Q = \{ (a, b) / a \in Z \text{ y } b \in (Z \setminus \{0\}) \}$$

8.- $\boxed{13} \rightarrow$ (x 2) $\rightarrow$ (x 3) $\rightarrow \boxed{78}$

¿Puedo pasar de 13 a 78 multiplicando por un solo número? ¿Cuál?

13 → x ? → 78

Siempre que se presenta un número como dato o **estado inicial** y una serie de multiplicaciones sucesivas (**operadores** multiplicativos) para obtener un resultado o **estado final**, puede reemplazarse esa cadena de operadores por un solo operador, por aplicación de la propiedad asociativa del producto. Por ejemplo:

a) Reducir la siguiente cadena de operadores multiplicativos:

$\boxed{5} \rightarrow$ (x 5) $\rightarrow$ (x 2) $\rightarrow$ (x 6) $\rightarrow \boxed{300}$

$\boxed{5} \rightarrow$ (x ?) $\rightarrow \boxed{300}$

b) Completar y reducir la cadena:

i) $\boxed{} \rightarrow$ (x 3) $\rightarrow$ (x10) $\rightarrow$ (x 7) $\rightarrow$ (x 2) $\rightarrow \boxed{4200}$

$\boxed{} \rightarrow$ (x ?) $\rightarrow \boxed{4200}$

ii) $\boxed{4} \rightarrow$ (x ?) $\rightarrow$ (x 5) $\rightarrow$ (x 2) $\rightarrow \boxed{120}$

$\boxed{4} \rightarrow$ (x ?) $\rightarrow \boxed{120}$

c) Transformar la siguiente cadena reducida en una cadena "larga":

$\boxed{5} \rightarrow$ (x24) $\rightarrow \boxed{120}$

Trabajemos ahora cadenas para división:

$\boxed{30} \rightarrow$ (: 2) $\rightarrow$ (: 3) $\rightarrow \boxed{5}$

$\boxed{30} \rightarrow$ (: ?) $\rightarrow \boxed{5}$

¿Qué operación corresponde realizar con los operadores ": 2" y ": 3" para reducirlos al ":6"? La propiedad que permite "simplificar" una serie de divisiones, no tiene un nombre determinado, pero es muy usada por su practicidad.

9.- a) Reducir la siguiente cadena:

$$\boxed{48} \rightarrow :3 \rightarrow :4 \rightarrow :2 \rightarrow \boxed{?}$$

$$\boxed{48} \rightarrow :? \rightarrow \boxed{}$$

b) "Alargar" la siguiente cadena:

$$\boxed{300} \rightarrow :60 \rightarrow \boxed{5}$$

c) Completar y luego reducir, la siguiente cadena de operadores:

$$\boxed{?} \rightarrow :3 \rightarrow :7 \rightarrow :4 \rightarrow \boxed{6}$$

10.- Reducir y completar:

a) $\boxed{12} \rightarrow \times 2 \rightarrow :3 \rightarrow \times 4 \rightarrow \boxed{}$

b) $\boxed{20} \rightarrow :5 \rightarrow :2 \rightarrow \times 3 \rightarrow \boxed{}$

c) $\boxed{30} \rightarrow \times 7 \rightarrow :3 \rightarrow \times 2 \rightarrow :5 \rightarrow \boxed{?}$

$\boxed{30} \rightarrow \times ? \rightarrow :? \rightarrow \boxed{?}$

Estas cadenas pueden expresarse con operadores fraccionarios de la siguiente manera:

$$\boxed{30} \rightarrow \times \frac{7}{3} \rightarrow \times \frac{2}{5} \rightarrow \boxed{?}$$

$$\boxed{30} \rightarrow \times ? \rightarrow \boxed{?}$$

Es decir que:

$\times \frac{7}{3} \times \frac{2}{5}$ equivale a $\times \frac{14}{15}$

y abusivamente, pero en forma más habitual:

$$\frac{7}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{14}{15}$$

y en general:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

11.- Teniendo en cuenta que la división es la operación inversa de la multiplicación, se tiene que:

$$\boxed{30} \rightarrow \times\frac{3}{5} \rightarrow :\frac{3}{5} \rightarrow \boxed{30}$$

pero:

$$\boxed{30} \rightarrow \times\frac{3}{5} \rightarrow \boxed{18} \quad (1)$$

Para pasar de 18 a 30 se emplea un operador fraccionario ¿de qué clase dentro de la partición de Q?

$$\boxed{18} \rightarrow ? \rightarrow \boxed{30}$$

evidentemente:

$$\boxed{18} \rightarrow \times\frac{5}{3} \rightarrow \boxed{30} \quad (2)$$

Si se reemplazan los valores de (1) y de (2) en el original del ejercicio:

$$\boxed{30} \rightarrow \times\frac{3}{5} \rightarrow \times\frac{5}{3} \rightarrow \boxed{30}$$

de donde se deduce que:

$:\frac{3}{5}$ es equivalente a $\times\frac{5}{3}$

y en general:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

12.- Para resolver $\frac{3}{5} + \frac{2}{3}$ ¿qué propiedad estudiada puede ayudarnos? Debemos recordar que cada fracción pertenece a toda una clase de fracciones equivalentes. Por convención esa clase suele representarse por la **fracción irreducible** perteneciente a esa clase, entendiéndose por fracción irreducible a aquella en la cual el numerador y denominador no tienen un divisor común (por ejemplo: $\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{5}{32}, \frac{11}{100}$ etc.).

De acuerdo a ello:

$\frac{3}{5}$ puede reemplazarse por $\frac{6}{10}, \frac{9}{15}, \frac{12}{20}, \frac{15}{25}$, etc.

$\frac{2}{3}$ puede reemplazarse por $\frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}, \frac{12}{18}$, etc.

Eligiendo los fraccionarios convenientes, podemos expresar:

$\frac{3}{5} + \frac{2}{3}$ es equivalente a $\frac{9}{15} + \frac{10}{15}$ que es igual a $\frac{19}{15}$

13.- Aplicar fracciones equivalentes para resolver los siguientes ejercicios:

a) $\frac{3}{8} + \frac{5}{7}$; b) $\frac{1}{6} + \frac{4}{5}$; c) $\frac{2}{3} + \frac{3}{10} + \frac{1}{12}$;

d) $\frac{13}{6} + \frac{1}{3} - \frac{5}{9}$; e) $3 + \frac{1}{4} + \frac{2}{10}$; f) $\frac{14}{3} - 2$.

14.- Un error común en la operatoria con racionales es el siguiente:

$$\frac{1}{9} + \frac{7}{8} = \frac{1+7}{9+8}$$

¿qué factores pueden inducir a esta equivocación? La experiencia en primaria, secundaria (y aun en el nivel superior) nos indica que mucho tiene que ver en ello una introducción superficial del concepto de racional y la falta de ejercitación que haga reflexionar sobre las propiedades de adición, sustracción, producto y cociente de naturales y enteros. Si se tiene clara la noción del racional como combinación de producto y cociente y las propiedades asociativa (de la suma y multiplicación) y distributiva (del producto y cociente con respecto a adición y sustracción) se llega con firmeza a descubrir los mecanismos de las operaciones con racionales.

En el tomo II retomaremos el tema, pero desde un punto de vista metodológico y enfocado hacia la escuela primaria.

15.- En este capítulo de Conjuntos Numéricos no presentaremos la totalidad de temas posibles (números irracionales, conjunto de reales, conjunto de números complejos) porque exigiría una extensión excesiva para una Guía de Trabajos Prácticos. No obstante, desarrollaremos brevemente una referencia a los números decimales, por ser ellos tema muy importante de la escuela primaria.

Se llaman fracciones decimales aquellas cuyo denominador es 10; 100; 1000; ...; es decir, potencias de 10. Por ejemplo: $\frac{4}{10}$; $\frac{-195}{100}$; $\frac{37}{100000}$ que se escriben como números decimales: 0,4; −1,95; 0,00037.

Esa escritura respeta el sistema posicional (base diez en este caso) utilizando columnas a la derecha de la unidad (ver ficha 1 de este capítulo).

Unidad de mil	Centena	Decena	Unidad	Décimo	Centésimo	Milésimo
		1	4,	3	0	2
			2,	0	5	
1	4	9	7,	8		
	6	8	0,	9	2	

Denominaremos "D" al conjunto de los números decimales:

$D^+ = \{ 38{,}5 ; 4{,}009 ; 0{,}3 ; \dots\dots \}$

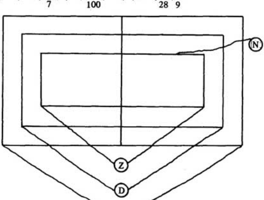
$D^- = \{ -2{,}5 ; -783{,}04 ; -0{,}37 ; \dots\dots \}$

$D = D^+ \cup D^-$

16.- La operatoria con números decimales se resuelve o bien considerándolos como fracciones o bien atendiendo a las leyes de un sistema posicional base diez. Los aspectos metodológicos del tratamiento del tema decimales en la escuela primaria los analizaremos en el tomo II.

17.- Ubicar los siguientes números en el esquema dibujado:

$5 ; 3^- ; 148 ; \frac{-1}{7} ; 0{,}08 ; \frac{-29}{100} ; -31{,}5 ; 19^- ; \frac{56}{28} ; \frac{3}{9}$.



Ficha 7 Ejercicios.

1.- ¿Cuánto le falta a 0,444 para 1 unidad?
¿Cuánto le falta a 0,099 para 1 unidad?
¿Cuánto le falta a 0,608 para 1 unidad?
¿Cuánto le falta a 0,099 para 1 décimo?
¿Cuánto le falta a 0,0450 para 1 décimo?
¿Cuánto le falta a 0,999 para 1 decena?
¿Cuánto le falta a 0,999 para 1 centena?

2.- ¿Por qué número decimal debo multiplicar a 14 para que el producto esté contenido dos veces en 14?

3.- a, b, c, d, son números decimales. Se sabe que $c \leqslant a$; $d \geqslant b$; $b \geqslant a$. Ordenar, si es posible, estos decimales del más pequeño al más grande. Idem para m, n, p, q, sabiendo que $q \leqslant n$; $q \leqslant p$; $m \geqslant p$.

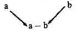
4.- Buscar un decimal **a** comprendido entre 2^- y $2{,}001^-$; después un decimal **b** comprendido entre 2^- y a; y así sucesivamente. ¿Puede encontrarse siempre un decimal comprendido entre 2^- y el último decimal encontrado?

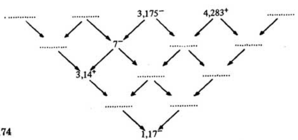
5.- Completar los siguientes cuadrados mágicos de suma:

	$0{,}01^-$	$2{,}5^-$	6^+
	15^+		
$0{,}3^-$	$0{,}5^-$		
	20^+	3^+	$0{,}05^+$

	16^+	$1{,}6^-$	$0{,}2^-$
	$0{,}4^-$	14^+	
$15{,}6^+$	$2{,}4^-$	$0{,}2^+$	
		$1{,}2^-$	

6.- Completar los lugares vacíos en el triángulo. Recordar la regla:

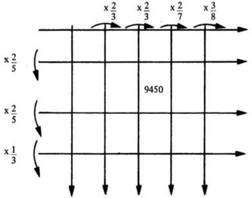




7.- Jorge pesa 30 kg.; su hermano Gerardo 36 kg. ¿Cuánto más pesado que Jorge es Gerardo? Indicarlo en forma de fracción.

8.- Buscar un operador fraccionario con denominador 3 que cuadruplique a 7.

9.- En el siguiente esquema, para pasar de un casillero a otro se debe "saltar" la línea haciendo la operación indicada por la flecha:



10.- El granjero Rojas tenía algunos animales. $\frac{1}{4}$ eran caballos, $\frac{1}{2}$ eran vacas. El resto eran 8 cerdos. ¿Cuántos caballos y cuántas vacas tenía?

11.- Completar con + ó – según corresponda:

$$\left(\frac{1}{2} \bigcirc \frac{1}{4}\right) \bigcirc \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

$$\frac{1}{2} \bigcirc \left(\frac{1}{2} \bigcirc \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2} \bigcirc \left(\frac{1}{3} \bigcirc \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{3}$

12.- Completar el siguiente cuadrado mágico de suma:

2	$\frac{9}{2}$	1
$\frac{3}{2}$		

7

El reconocimiento del espacio. Conjuntos de puntos

Existen "distintas" geometrías (métrica o euclidiana, topológica, proyectiva, afín, algebraica, finita, etc.) y diferentes criterios en cuanto a conveniencias de las mismas, tanto desde el punto de vista matemático como pedagógico.

Sin entrar en polémicas (que son sumamente interesantes y constructivas en este tema) presentaremos fichas con actividades que conduzcan al conocimiento del espacio y sus elementos, por ser ése el objetivo común de las diferentes posiciones de matemáticos y pedagogos, cuando se habla sobre geometría para la escuela primaria. Ponemos énfasis, eso sí, en que los elementos del espacio (estática y dinámicamente considerados) son concretizaciones de ciertos conceptos geométricos esencialmente abstractos. En la realidad física no existen los cuerpos, figuras, líneas y puntos de la geometría, como no existen el 2, la adición, la asociatividad, etc.

Ficha 1 Frontera. Cuerpos, figuras, líneas, puntos.

1.- Hay diferentes formas de determinar partes de espacio. Por ejemplo, la superficie interior de las paredes de una habitación, las superficies del piso y del techo, determinan el espacio interior de dicha habitación; la superficie de la piel determina el espacio que ocupa un ser humano.

2.- También puede determinarse una parte de espacio, "imaginariamente":

a) Colocada una persona en un punto fijo de un patio, que sólo pueda desplazarse cinco metros a partir del punto en que está, sin saltar ni perforar el suelo, la porción de espacio determinada estará limitada por:

i) una porción de suelo ¿con qué forma?

ii) un techo invisible a la altura de la cabeza de la persona ¿qué forma tiene ese techo?

iii)una pared invisible, situada a cinco metros del punto en que está parada la persona ¿qué forma tiene esa pared?

Atención: Se puede caminar en más de dos direcciones y más de cinco, y más de ocho...

b) ¿Qué forma tiene la parte de espacio limitada por una piedra atada a un hilo de 1 m. de longitud, que gire en todas las direcciones posibles, dejando fijo el extremo del hilo?

c) Imaginar una situación que permita determinar una parte de espacio con forma de cono.

d) Idem con forma de tronco de pirámide.

3.- Las porciones de espacio se separan unas de otras mediante fronteras. Estas fronteras se llaman **superficies.**

La superficie exterior de un huevo separa al espacio ocupado por el huevo del resto del espacio. Algunas superficies son **curvas** y otras son **planas.**

En una caja cerrada, el espacio interior está separado del espacio exterior mediante seis superficies planas (6 **caras**) que constituyen la frontera de la caja. ¿Es posible determinar una porción de espacio con sólo cuatro caras? ¿Qué forma tienen las caras?

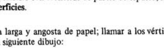
La frontera permite separar el **interior** de una caja, del **exterior**.

4.- No siempre interesa trabajar con superficies completas, por ejemplo, con superficies que comprendan una parte de espacio al cual separan del resto del espacio. Puede interesar trabajar con una cara de una caja, por ejemplo, y no con toda la superficie de la caja. O, si tenemos una pelota, puede interesar dibujar algo en una parte de la pelota y no en toda ella. Para separar la parte de la superficie que nos interesa, necesitamos una frontera.

Consideremos una cara de una caja. Siguiendo con el dedo el borde de la cara, se recorren cuatro aristas. Estas cuatro aristas constituyen la **frontera** de la cara.

Así como las superficies son fronteras de partes de espacio, **las líneas son fronteras de partes de superficies.**

5.- Recortar una tira larga y angosta de papel; llamar a los vértices con las letras A, B, C y D como en el siguiente dibujo:



Curvar el papel de modo que la esquina A caiga sobre la D y la B sobre la C. Recorrer con el dedo la frontera de esta superficie. ¿Se puede recorrer toda la frontera sin levantar el dedo del papel o es necesario levantar el dedo?

La superficie construída se llama superficie cilíndrica.

6.- a) Cortar otra tira igual a la anterior, nombrando las esquinas de la misma manera. Antes de unir los extremos de la tira, dar vuelta al extremo AB de modo que A se una con C y B con D.

Recorrer con el dedo toda la frontera de la superficie que se acaba de construir. Hacer una marca en el lugar donde se empieza. ¿Fue necesario levantar el dedo o se pudo recorrer la totalidad de la frontera sin levantar el dedo del papel?

Esta superficie se llama banda de Moebius.

b) Con una tijera hacer un pequeño orificio en cualquier punto de la tira y cortar por el medio a lo largo de la tira hasta llegar al lugar desde donde se empezó a cortar. ¿Qué se observa? ¿Se puede recorrer con el dedo la nueva frontera sin levantarlo del papel?

7.- Tomar la superficie cilíndrica; recortar por el medio y a lo largo, tal como se hizo para la banda de Moebius.

Contestar las mismas preguntas del apartado 6 para esta situación.

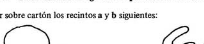
8.- Se ha visto que para determinar porciones de espacio se necesita un tipo de frontera que se llama superficie; para determinar partes de superficies se necesitan líneas.

¿Qué tipo de frontera se necesita para determinar porciones de línea? Sólo se necesita un punto en cada extremo de la frontera.

La porción de línea determinada o limitada por sus dos puntos extremos se llama **segmento**. Tal porción de línea recta se llama **segmento de recta**. Un segmento es recto si en él no existen curvas o vértices; si recorremos un segmento de recta siempre andamos en la **misma dirección.**

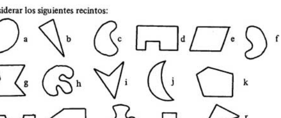
Ficha 2 Convexidad. Ángulo. Perpendicularidad. Paralelismo.

1.- Recortar sobre cartón los recintos **a** y **b** siguientes:



Si se coloca una goma elástica alrededor de cada uno de ellos se observa que la goma toma exactamente la forma de la frontera del recinto **a**, pero no ocurre lo mismo para el recinto **b**.

2.- Considerar los siguientes recintos:



a) Clasificarlos en un diagrama de Carroll ubicando en la región A los recintos en los cuales la goma tome con exactitud la forma completa de la frontera y en la región $\bar{A}$ los restantes.

b) Inventar dos recintos que sean elementos de la clase A y dos que sean elementos de la clase $\bar{A}$.

c) ¿Se puede dibujar un recinto que no pertenezca a A ni tampoco a $\bar{A}$?

d) Pintar la frontera del recinto **x**, la de **y** y la de **z** (cada una de estas fronteras está constituída por dos trozos:

recinto x recinto y recinto z.

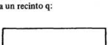
¿En qué clase se colocan los recintos x, y, z, dentro del diagrama del item a)?

Los recintos de la clase A son **convexos.** Los recintos de la clase $\bar{A}$ son **no-convexos.**

3.- a) Dibujar un triángulo; ¿es convexo? ¿Existen triángulos no-convexos?

b) ¿Cuáles de los recintos del apartado 2 son **cuadriláteros**? ¿Existen cuadriláteros no-convexos?

c) Sea un recinto q:

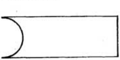
q 

i) Dividir **q** en dos recintos **u** y **v** que no se superpongan y tales que **u** y **v** sean ambos convexos.

ii) Idem con **u** convexo y **v** no convexo.

iii) Idem con **u** y **v** ambos no convexos.

d) Considerando el recinto **r**:

 r

aplicarle las consignas i), ii) y iii) del item anterior.

e) Idem para el recinto s:

s

f) El mapa de Argentina ¿define un recinto convexo?

4.- De los recintos a, b, c, d siguientes, ¿cuáles son convexos y cuáles no convexos?

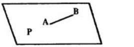
Se han trazado algunos segmentos cuyos extremos son puntos de cada uno de estos recintos. Para **b** y **c** todos los puntos de los segmentos trazados son puntos del recinto. En el recinto **b**, determinar dos puntos M y N de forma tal que alguno de los puntos del segmento MN no pertenezca al recinto; ¿es posible? Idem para el recinto **c**.

Para el recinto **a**, se pueden hallar dos puntos P y Q tales que los puntos del segmento PQ no sean todos puntos del recinto. Ocurre lo mismo para **d**. Este es otro procedimiento para caracterizar un recinto convexo:

"b es *convexo*" significa:	siendo M y N dos puntos cualesquiera de b, todos los puntos del segmento MN son puntos del recinto b.

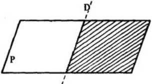
5.- P es un plano.

Siendo A y B dos puntos cualesquiera de P, todos los puntos del segmento AB son puntos de P.



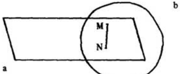
Todo plano es convexo.

Si se traza una recta D en el plano P, ésta divide al plano en dos recintos de frontera D:



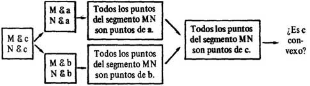
Son dos semiplanos. ¿Un semiplano, es convexo?

6.- Sean dos recintos convexos **a** y **b**. Su intersección es el recinto **c**.



M y N son dos puntos cualesquiera de **c**.

Explicar el siguiente organigrama:



La intersección de dos recintos convexos es un recinto convexo.

a) Dibujar dos recintos no convexos cuya intersección sea un recinto convexo.
b) Dibujar dos recintos convexos cuya unión sea convexa.
c) Dibujar dos recintos no convexos cuya intersección sea un recinto no convexo.
d) Dibujar dos recintos convexos cuya unión sea no convexa.

7.- El interior de un cubo es también un recinto. Para saber si es convexo ya no se puede utilizar la goma elástica. Se pueden únicamente utilizar los segmentos cuyos extremos son puntos de este recinto. Es fácil deducir que el recinto interior de un cubo es convexo. Considerar los siguientes recintos, interiores a cuerpos geométricos. ¿Son convexos o no convexos?

a) El interior de una esfera.
b) El interior de un tetraedro.
c) El interior de un neumático inflado.
d) El interior de un tapón de botella de sidra.
e) El interior de su spaghetti cocido.
f) El interior de un spaghetti crudo.

8.- Representar dos semiplanos (R rayado |||||, G rayado ≣) tales que la intersección de sus fronteras sea un punto solamente:

a) Pintar de verde $R \cap G$.
b) Pintar de azul $R \cup G$.

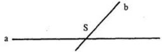
En ambos casos ($\cup$ e $\cap$) el resultado es un *ángulo* o *sector angular.*
De lo visto en el apartado 6 se deduce que $R \cap G$ es un **ángulo convexo.**

9.- La "$\cup$" o la "$\cap$" de una porción de espacio (semiplanos con ciertas restricciones) nos ha permitido suministrar una de las definiciones de ángulo.

Aplicando ahora la "$\cap$" a otras porciones de espacio (las líneas rectas) llegaremos a otros conceptos fundamentales.

Dadas dos rectas coplanares a y b, su intersección puede ser:

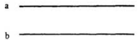
a) Un punto



determinando en el plano cuatro ángulos.

Si esos cuatro ángulos son iguales, a es *perpendicular* a **b**.

b) Vacío



a es *paralela* **a b**.

c) Una recta

a es *congruente* con **b**
a es paralela a b.

10.- En III.3.5. se analizaron las relaciones "es paralela a" y "es perpendicular a". ¿Son reflexivas? ¿Son simétricas? ¿Son transitivas? ¿Son relaciones de equivalencia?

11.- a) La siguiente tabla presenta la relación "es paralela a" en el conjunto de rectas { a, b, c, d, e }. Dibujar dichas rectas:

	a	b	c	d	e
a	x	x			
b	x	x			
c			x	x	
d			x	x	
e					x

b) Dibujar las rectas m, n, p, q y r, teniendo en cuenta los datos de la tabla siguiente, que representa la relación "es perpendicular a":

	m	n	p	q	r
m			x		
n				x	
p	x				x
q		x			
r			x		

¿Cómo son m y r?

Ficha 3 Clasificación de cuerpos. Poliedros. Prismas. Pirámides.

En las fichas precedentes hemos introducido nociones básicas (y a nivel elemental) que permiten estudiar algunos elementos del espacio (de tres, dos y una dimensiones). Teniendo en cuenta dichas nociones (frontera, convexidad, ángulo, paralelismo y perpendicularidad) presentaremos una de las numerosas maneras de analizar los elementos del espacio.

1.- Del espacio-ambiente en que vivimos, citar dos elementos que cumplan, en cada caso, las siguientes condiciones:

a) Sean cerrados.
b) Sean cerrados y convexos.
c) Sean cerrados, convexos y con frontera lineal.
d) Sean cerrados, no convexos y con superficies como fronteras.
e) Sean cerrados y con superficies planas como frontera.
f) Sean cerrados y con puntos como frontera.
g) Sean cerrados y con alguna superficie plana no convexa como parte de su frontera.

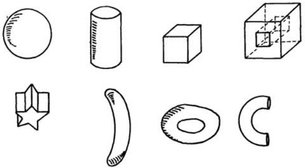
Los elementos cerrados y con frontera superficial los llamaremos *cuerpos.*

Los elementos cerrados y con frontera lineal los llamaremos generalmente ....
....

Los elementos del espacio físico que son: cerrados y con puntos como frontera, se llaman habitualmente ....

> **Importante:** Debemos distinguir la interpretación concreta y del mundo físico de cuerpo, figura, línea y punto, y lo que es el concepto matemático de esos entes.
>
> En la realidad física no existen los elementos matemáticos puros; éstos son posibles solamente a nivel abstracto.

2.- Clasificar los siguientes cuerpos:



a) En convexos y no convexos.

b) Según tengan:

i) ninguna región de su frontera plana;

ii) por lo menos una región de su frontera plana y por lo menos una región no plana;

iii) toda su frontera formada por regiones planas.

c) El siguiente esquema resume las dos clasificaciones anteriores; completarlo.

convexos			
no convexos			
	i	ii	iii

3.- De los cuerpos analizados en el apartado anterior, hay una clase especialmente interesante desde el punto de vista didáctico: la de los *poliedros*.

> Un poliedro es un cuerpo totalmente limitado por regiones planas.

Las regiones planas de la frontera de un poliedro son las **caras** del poliedro. Dos caras se pueden encontrar en una línea, llamada **arista** del poliedro. Tres o más aristas se pueden encontrar en un punto, llamado **vértice** del poliedro.

Se llaman **poliedros regulares** aquellos que cumplen las siguientes condiciones:

i) todas sus caras tienen la misma forma y el mismo tamaño;

ii) todas sus caras son equilaterales y equiangulares;

iii) el número de aristas que se encuentran en un vértice es el mismo para todos los vértices.

a) De los cuerpos del apartado 2 ¿cuáles son poliedros regulares?

b) Matemáticamente se puede demostrar (y lo hizo Platón en el año 400 a.C.) que sólo pueden existir cinco poliedros regulares. Ellos son:

	tetraedro	cubo	octaedro	dodecaedro	icosaedro
forma de las caras	triángulos			pentágonos	triángulos
número de vértices					12
número de aristas		12			
número de caras		6	8	12	20
número de aristas concurrentes en cada vértice			4		5

Completar el cuadro precedente.

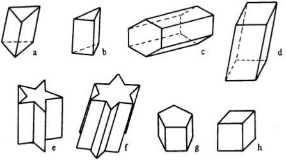
4.- Otro conjunto importante, dentro de los poliedros, es el de los prismas.

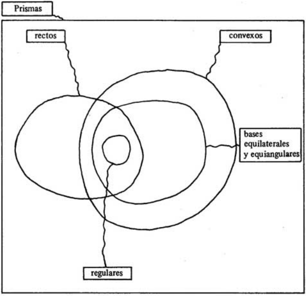
Un *prisma* puede ser definido como un poliedro que posee dos caras paralelas de la misma forma y el mismo tamaño (llamadas **bases**) y del cual las otras caras (llamadas **caras laterales**) son paralelogramos.

En todos los prismas el número de aristas que se encuentran en un vértice es 3.

Un prisma es **recto** si y sólo si todas sus caras laterales son rectángulos.

a) Dado el conjunto de prismas $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ ubicarlos en el diagrama dibujado a continuación de ellos.





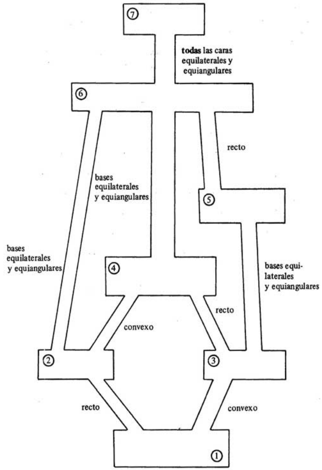
b) Para cada una de las siguientes frases, decir si es verdadera o falsa:

i) todo prisma recto es convexo;
ii) todo prisma regular es convexo;
iii) todo prisma convexo es regular;
iv) todo prisma regular es recto.

c) El esquema que presentamos a continuación incluye una serie de casilleros numerados en orden creciente, y "rutas" a seguir por los prismas a analizar. Ubicar todos los prismas del apartado 4 a) en el casillero 1, y a partir de allí hacer recorrer, a cada uno de los prismas, las rutas que "ascienden" en el esquema, dejándolos sin avanzar, si no cumplen la condición de la ruta.

En cada caso se deberá responder a las siguientes preguntas, para proseguir el camino o no:

i) ¿cuáles son los prismas que pueden llegar a este casillero?
ii) ¿cuáles son los prismas que pueden llegar a este casillero, pero no pueden seguir avanzando?


⑦
todas las caras
equilaterales y
equiangulares
⑥
recto
bases
equilaterales
y equiangulares
⑤
bases
equilaterales
y equiangulares
④
bases equi-
laterales
y equiangulares
recto
convexo
②
③
recto
convexo
①

Atención: Puede darse el caso de un mismo prisma que, partiendo de ①, "tenga derecho" a llegar a ② y también a ③; en ese caso escribir la letra que lo representa en ambos casilleros. A partir de ① **todo** prisma que pueda recorrer un camino, debe seguirlo.

Al llegar a ⑦ podrá observarse un interesante panorama de los prismas "que siguieron" y de los "que quedaron", en función de las "propiedades" adjudicadas a cada ruta.

Completar el cuadro siguiente con el resultado del ejercicio:

casillero	conjunto de prismas que pueden llegar a este casillero	conjunto de prismas que no pueden avanzar de este casillero
①		
②		
③		
④		
⑤		
⑥		
⑦		

Comparar esta actividad con la hecha en a), ¿en qué se parecen? ¿Qué propiedades tiene el cubo?

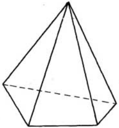
5.- En el referencial de poliedros, pueden estudiarse numerosos subconjuntos (ya hemos visto los poliedros regulares, los prismas y un subconjunto de éstos: los prismas rectos).

Estudiaremos ahora otro conjunto incluído en el de poliedros: el conjunto de las *pirámides*.

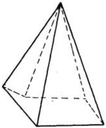
> Una pirámide es un poliedro que tiene una cara (llamada **base**) que puede poseer diversas formas, y las otras caras son triángulos que se encuentran en un punto común (llamado **vértice** de la pirámide).

a) Según la forma de la base, las pirámides pueden clasificarse en triangulares, cuadrangulares, pentagonales, hexagonales, etc.

b) Las pirámides también pueden ser convexas o no.



i) pirámide convexa



ii) pirámide no convexa

c) Existen pirámides cuya base es equilateral y equiangular y otras en que esa condición no se cumple. ¿A cuál de estas dos últimas clases pertenecen las pirámides dibujadas en b.i) y b.ii)?

d) Hay pirámides en las cuales la perpendicular trazada desde el vértice a la base, pasa por el centro de ésta. Ellas se llaman **pirámides rectas.**

e) Sean:

A el conjunto de pirámides convexas;

B el conjunto de pirámides rectas;

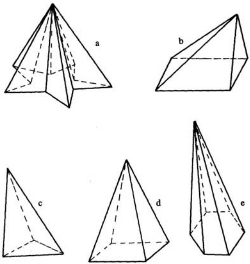
C el conjunto de pirámides con base equilateral y equiangular;

D el conjunto de pirámides con **todos** los vértices de igual orden, es decir que a todos los vértices concurre un mismo número de caras.

El siguiente diagrama de Carroll representa una clasificación de todas las pirámides.

	C		$\overline{C}$		
A	1	2	3	4	$\overline{B}$
	5	6	7	8	B
$\overline{A}$	9	10	11	12	
	13	14	15	16	$\overline{B}$
	$\overline{D}$	D		$\overline{D}$	

i) Ubicar las siguientes pirámides en la región correspondiente:



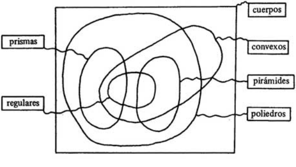
ii) Dibujar una pirámide para cada una de las regiones restantes.

Las regiones 10, 11, 14 y 15 quedan vacías, ¿por qué? Tener en cuenta que el orden de un vértice de la base de una pirámide **es siempre tres** ¿y el del vértice de la pirámide también? Además, ¿existen triángulos no convexos?

También las regiones 9, 10, 13 y 14 quedan vacías, ¿por qué? Tener en cuenta aquí la convexidad de la pirámide y la equilateralidad y equiangularidad de la base. ¿Un polígono no convexo puede ser equilateral y equiangular?

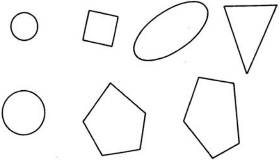
¿Qué propiedades tiene la pirámide ubicada en la región 6? ¿Es un poliedro regular?

6.- No es posible agotar aquí el estudio de los cuerpos. Hemos intentado tan solo dar un panorama de ellos que permita ser ampliado por el lector partiendo de los mismos criterios generales: fronteras con regiones solamente planas o no, convexidad o no, paralelismo o no, perpendicularidad o no, congruencia (equilateralidad y equiangularidad) o no, que convergen en un conjunto muy especial como el de los poliedros regulares. Resumimos los aspectos considerados en el siguiente diagrama:

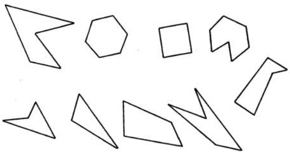


Ficha 4 Clasificación de figuras. Polígonos. Paralelogramos. Triángulos.

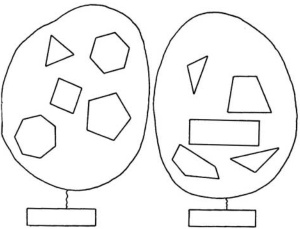
1.- a) Aquí tenemos algunas figuras. Clasificarlas en dos conjuntos. ¿Qué se puede tener en cuenta para ello?



b) Todas las figuras siguientes son *polígonos*. Clasificarlos en dos conjuntos. ¿Qué se obtiene en cada uno de ellos?

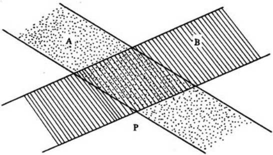


c) Observar esta clasificación. Escribir en los recuadros la propiedad común de los polígonos de cada conjunto.



2.- Dibujar dos bandas de papel transparente, que tengan sus bordes paralelos; superponer dichas bandas de forma tal que sus bordes se intersecten para observar las diferentes posibilidades que pueden obtenerse. El concepto básico subyacente en esta actividad es que:

La intersección de dos bandas de plano (A y B) de bordes paralelos es un *paralelogramo*.

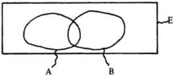


a) Superponer perpendicularmente dos bandas (C y D) de lados paralelos. El paralelogramo que se obtiene es un *rectángulo*.

b) Efectuar la intersección de dos bandas iguales, de lados paralelos. El paralelogramo que se obtiene es un *rombo*.

c) ¿Qué condición deben tener las bandas de lados paralelos, para que su intersección sea un *cuadrado*?

3.- a) El siguiente diagrama de Venn resume lo visto en el apartado anterior:



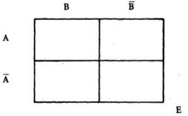
E = { paralelogramos }

A = { rectángulos }

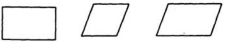
B = { rombos }

A ∩ B = ...

b) Siendo E, A y B los mismos conjuntos anteriores, dibujar un elemento adecuado en cada una de las regiones del siguiente diagrama de Carroll.



4.- En los siguientes paralelogramos trazar las diagonales:



a) ¿Cuántas diagonales tiene todo paralelogramo?
b) Las diagonales de todo paralelogramo ¿se cortan mutuamente en partes iguales?
c) Las diagonales de todo paralelogramo ¿son iguales?
d) Las diagonales de todo paralelogramo ¿son perpendiculares?
e) Este análisis de las diagonales nos permite reafirmar que los rombos son paralelogramos y que algunos de ellos son rectángulos; ¿cuáles?

También se afirma el concepto de que todo rectángulo es paralelogramo y que algunos rectángulos son rombos.

f) Responder V (verdadero) o F (falso) en cada uno de los siguientes casos:

i) algún rombo es cuadrado	V	F
ii) ningún rectángulo es cuadrado	V	F
iii) todo paralelogramo es rombo	V	F
iv) algún no rectángulo es paralelogramo	V	F
v) todo cuadrilátero con diagonales iguales es un paralelogramo	V	F
vi) algún no cuadrado tiene sus diagonales perpendiculares	V	F

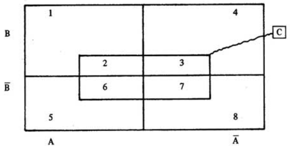
5.- Recortar en papel transparente una banda de lados paralelos M, y un sector angular agudo o ángulo agudo R.

Si el vértice del sector angular es exterior a la banda ¿qué origina la intersección de M y R, cuando no es vacía?

a) ¿Qué particularidad deben tener el sector y la banda para que su intersección sea un trapecio rectángulo? Dibujar sector y banda, pintando la intersección.

b) ¿Cómo deben ubicarse sector y banda para originar un trapecio isósceles al intersectarse? Dibujar.

6.- a) En el referencial de los cuadriláteros convexos se ha efectuado la clasificación indicada en el siguiente diagrama:



siendo:

A = $\{$ x / x es cuadrilátero convexo con **por lo menos** un par de lados paralelos $\}$

B = $\{$ x / x es cuadrilátero convexo con **por lo menos** un par de lados iguales $\}$

C = $\{$ x / x es cuadrilátero convexo con **por lo menos** un ángulo recto $\}$

i) ¿en qué región se ubican los rectángulos?
ii) ¿Hay algún región vacía?
iii) ¿Qué elementos se ubican en 4? ¿En 5? ¿En 7?
iv) Dibujar un elemento de la zona 1 y otro de la zona 3.

b) Tomar como partida el conjunto cuyos elementos son cada una de las propiedades que puede tener un cuadrilátero convexo, y como llegada las ocho regiones del diagrama de Carroll del item anterior. Establecer entre esos conjuntos la relación M: "es propiedad de los elementos de la zona".

i) ¿es función? ¿Por qué?
ii) ¿Es biyección? ¿Por qué?
iii) ¿Cuál es la recíproca de M? Dar tres pares de elementos de M^{-1}.
iv) ¿Es M^{-1} función? ¿Por qué?

c) Dibujar un cuadrilátero convexo, con lados no paralelos, pares de lados iguales y un ángulo recto. ¿Es posible con dos ángulos rectos? ¿Por qué? ¿Es posible un trapecio con un sólo ángulo recto? ¿Por qué?

7.- Si se pretende continuar con el criterio de intersectar bandas de lados paralelos, semiplanos o sectores angulares para "descubrir" figuras planas, ¿qué elementos deben emplearse para llegar a un triángulo? ¿Qué condiciones hay que imponer en ese caso?

a) Dado un semiplano P de frontera F y un sector angular agudo S cuyo vértice pertenezca a P y no pertenezca a F, si un borde de S es perpendicular a F ¿qué se obtiene de $P \cap S$?

b) i) si la bisectriz de S es perpendicular a F ¿qué clase de triángulo se obtiene?

ii) repetir la construcción anterior, siendo S un sector angular de 60º. El triángulo isósceles que se obtiene tiene una característica interesante ¿cuál es?

c) Determinar las condiciones de P y S para que $P \cap S$ dé un triángulo obtusángulo.

d) Idem para un triángulo acutángulo.

e) i) construir un triángulo con las condiciones a) y b.i) simultáneamente;

ii) idem con a) y b.ii);

iii) idem con b.i) y c);

iv) idem con b.i) y d);

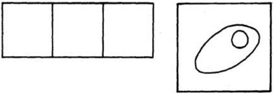
v) idem con b.ii) y d);

vi) idem con b.ii) y c);

¿todos los ejercicios pedidos tienen solución?

f) Los diagramas siguientes son representaciones de la clasificación de triángulos por sus lados o por sus ángulos. Determinar cuál corresponde a cada una de ellas y aclarar por qué.

i ii

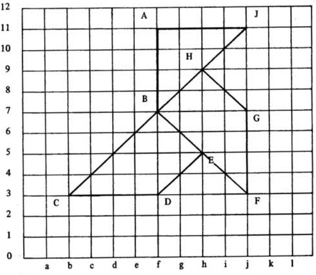


g) Reunir las dos clasificaciones del item f) en un único diagrama.

8 Transformaciones

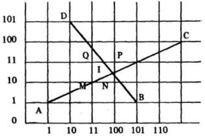
Ficha 1 Localización de puntos en el espacio.

1.- Se ha dibujado un pajarito en una cuadrícula. El punto A se localiza mediante el par (f ; 11). Buscar los pares que localizan los puntos B, C, D, E, F, G. H y J.

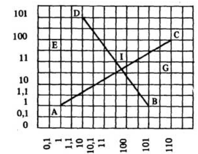


2.-a) Observar este otro dibujo. Los números están escritos en base dos. El punto B está localizado por el par (101 ; 1). ¿Cuáles son los pares que localizan los puntos A, C y D?

Queremos localizar el punto I; se encuentra dentro de la "casilla" MNPQ. ¿Qué pares localizan los puntos M, N, P y Q?



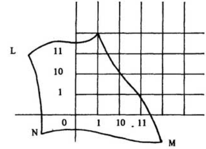
b) Para precisar más podemos hacer una cuadrícula más "fina" dividiendo cada casilla en cuatro casillas cuadradas. Indicar los nuevos números intercalados entre los que ya teníamos (algunos de estos números están ya escritos en la figura siguiente):



¿Qué pares localizan los puntos E y G? ¿Qué puede decirse ahora del punto I?

c) Si se quiere tener una cuadrícula más fina todavía, ¿qué nuevos números deberían introducirse?

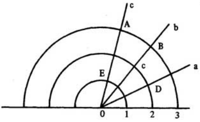
d) El dibujo siguiente "sale" de la cuadrícula. Prolongar esta cuadrícula hacia la izquierda y hacia abajo. ¿Qué nuevos números se introducen para ello? ¿Cómo localizar los puntos L, M y N?



3.- Esta vez el dibujo representa segmentos y arcos de circunferencia. El punto B está localizado por el par (3 ; b). Localizar los puntos A, C, D, E y F. Colocar en el dibujo los puntos localizados por los pares:

(2 ; c), (3 ; d), (1 ; a)

Esta manera de localizar nos recuerda la utilizada a veces en los circos.



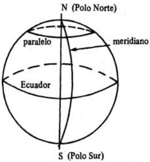
4.- La superficie de la Tierra puede ser considerada como una esfera. De ahí el nombre de esfera terrestre.

Para conocer su situación, un navegante debe localizarse sobre una esfera. Para ello imaginaremos unas líneas trazadas sobre la esfera terrestre.

La Tierra da una vuelta cada 24 horas, girando sobre ella misma alrededor de un eje imaginario, el eje de los polos NS, que pasa por el polo Norte y por el polo Sur.

Un **meridiano** es una semicircunferencia de diámetro NS. Podemos trazar muchísimos meridianos.

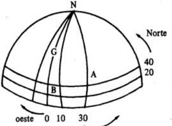
Un **paralelo** es una circunferencia de "eje" NS. Podemos trazar también muchísimos paralelos. El **ecuador** es un paralelo.



5.- Imaginar 360 meridianos numerados; el meridiano 0 pasa por Greenwich. Los otros meridianos se numeran del 0 al 180 hacia el este del meridiano 0 y del 0 al 180 hacia el oeste. Estos meridianos determinan sobre el ecuador arcos de igual longitud.

Imaginar 90 paralelos en el hemisferio norte separados por el mismo espacio, y 90 en el hemisferio sur. Sus radios van disminuyendo a medida que se van aproximando a los polos, de modo que el número 90 queda reducido a un punto. Observar el punto A de la siguiente figura. Se encuentra sobre el meridiano 30 al este de Greenwich; diremos que su *longitud* **es 30º Este**. Se encuentra sobre el paralelo 40, Norte. Diremos que su *latitud* es **40º Norte**. Así pues el punto A está localizado por el par (30E, 40N) formado por su longitud y su latitud.

Para el punto B, su longitud "1" es tal que: $0 < 1 < 10E$ y su latitud "L" es tal, que: $20N < L < 40N$. De hecho, si se hubiesen trazado más paralelos y meridianos, se habría obtenido una localización más exacta.



6.- Si llamamos E al conjunto de los puntos de la Tierra:

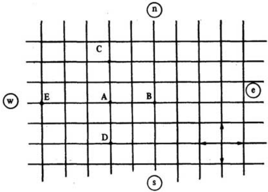
$\mathcal{R}$ es la relación en E: "tiene la misma latitud que", y

$\mathcal{L}$ es la relación en E: "tiene la misma longitud que".

Siendo A un punto de la tierra:

- ¿dónde están situados los puntos M de la tierra, tales que A $\mathcal{L}$ M?
- ¿Dónde están situados los puntos P de la tierra, tales que A $\mathcal{R}$ P?
- ¿Qué puede decirse de los puntos C y D tales que:
  C $\mathcal{R}$ D y C $\mathcal{L}$ D?

7.- Consideremos ahora la siguiente cuadrícula y los puntos A, B, C, D y E.



En los bordes se han marcado, como en geografía, n: norte; s: sur; e: este; w: oeste (usamos "w" para no confundir con el cero).

Partiendo de A llegamos a B moviéndonos 2 cuadraditos hacia el este o sea **2e**.

¿Cuál es el movimiento que, partiendo de A, nos permite llegar a C?

Partiendo del punto E, trazar los siguientes caminos:

a) $\underrightarrow{\text{E 1e; 1n; 2e; 1n}}$

b) $\underrightarrow{\text{E 4n; 2e; 2s; 1e}}$

c) $\underrightarrow{\text{E 2n; 3e}}$

¿Cuál es el punto de llegada en cada caso?

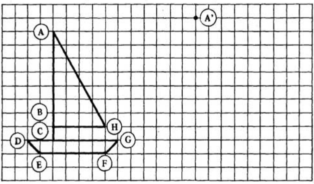
Se observa que partiendo de un mismo punto se llega también a un mismo punto.

Dos caminos que tengan el mismo punto de partida y el mismo punto de llegada son **caminos equivalentes.**

De los tres caminos a), b) y c) ¿cuál es el más corto? ¿Existe otro camino más corto que el indicado en el inciso c)?

Ficha 2 | Traslación.

1.- En la cuadrícula siguiente, reproducir un barquito de las mismas dimensiones que el dado, a partir de A'.



Ubicar sobre el segundo barquito las letras A', B', C', D', E', F', G' y H', de tal manera que al superponer los dos barcos, A coincida con A', B con B', etc. Trazar los segmentos AA', BB', CC', DD', EE', FF', GG' y HH', ¿qué se observa?

Medir dichos segmentos; ¿qué se observa?

Buscar el camino más corto para llegar de:

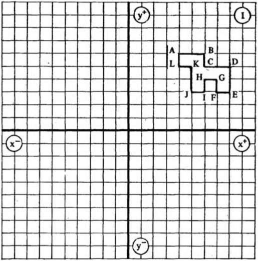
A a A'
B a B'
C a C'
D a D'

¿Qué se puede decir de estos caminos? (Recordar el código utilizado en la ficha anterior).

Se pasa del barco ABCDEFGH al barco A'B'C'D'E'F'G'H' por la *traslación* (12e ; 2n).

2.- De aquí en adelante utilizaremos los ejes cartesianos ortogonales para localizar puntos en una cuadrícula e indicaremos las traslaciones con pares de números enteros donde, por convención, el primer elemento del par indicará desplazamientos sobre el eje x (dirección este-oeste en ambos sentidos) y el segundo elemento del par indicará desplazamientos sobre el eje y (dirección norte-sur en ambos sentidos).

En la cuadrícula siguiente se ha dibujado un perro. Dar los pares que localizan cada uno de los puntos A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K y L.



a) Aplicar al dibujo (I) la traslación T_1 [−9 ; 1] Se obtiene un nuevo dibujo que llamaremos (II) y esquematizaremos el trabajo realizado de la siguiente manera:

T_1 (I) ⟶ (II)

b) Siendo T_2 la traslación [3 ; −8] efectuar:

T_2 (I) ⟶ (III)

donde llamamos (III) al perro que se dibuja al aplicar [3 ; −8] a los "vértices" del perro (I)

c) Dada T_3 [−10 ; −9], aplicarla a (I) de modo que:

T_3 (I) ⟶ (IV)

La traslación es una transformación (o movimiento) en el plano, que puede individualizarse por el trazado de segmentos paralelos de igual longitud, o por los caminos equivalentes que recorren en una cuadrícula los puntos de la figura original para llegar a los puntos correspondientes de la figura transformada. Mediante el calcado con papel transparente, se verifica concretamente una propiedad fundamental de las traslaciones: la figura primitiva y su trasladada son congruentes, es decir, sus lados y ángulos tienen iguales medidas y pueden superponerse, sin efectuar cambio de cara de la figura transformada.

Puede estudiarse también la traslación como una relación que tiene como partida el conjunto de puntos de la figura (cuerpo o línea) original y como llegada el conjunto de puntos de la figura trasladada. Esa relación ¿es función? ¿Es biyección?

El tema de transformaciones geométricas es sumamente rico en posibilidades matemáticas (coordenadas, caminos equivalentes, isometrías de los elementos transformados, biyecciones y por lo tanto en análisis estructural de la composición de biyecciones) y también como nexo integrador de diversas áreas.

Analizaremos, además, una relación aritmética operacional entre las coordenadas de una figura y su trasladada.

$\text{I} \xrightarrow{T_1} \text{II}$ mediante la siguiente transformación de las coordenadas de I:

A (4 ; 6) ⟶ A_1 (−5 ; 7)
B (6 ; 6) ⟶ B_1 (−3 ; 7)
C (6 ; 5) ⟶ C_1 (−3 ; 6)
D (8 ; 5) ⟶ D_1 (−1 ; 6)
E (8 ; 3) ⟶ E_1 (−1 ; 4)
F (7 ; 3) ⟶ F_1 (−2 ; 4)
G (7 ; 4) ⟶ G_1 (−2 ; 5)
H (6 ; 4) ⟶ H_1 (−3 ; 5)
I (6 ; 3) ⟶ I_1 (−3 ; 4)
J (5 ; 3) ⟶ J_1 (−4 ; 4)
K (5 ; 5) ⟶ K_1 (−4 ; 6)
L (4 ; 5) ⟶ L_1 (−5 ; 6)

¿Cómo puede pasarse de las coordenadas de I a las de II ? Evidentemente **sumando** a las coordenadas de I el par [−9 ; 1].

3.- Uniendo los puntos A (6 ; 1), B (9 ; −2), C (6 ; −5) y D (3 ; −2) representados en un par de ejes cartesianos se obtiene un . . . .

a) Al cuadrilátero ABCD, apliquémosle T_1 [−8 ; 7]:

A (6 ; 1)	B (9 ; −2)	C (6 ; −5)	D (3 ; −2)
↓ T_1	↓ T_1	↓ T_1	↓ T_1
A_1 ( )	B_1 ( )	C_1 ( )	D_1 ( )

Al cuadrilátero $A_1B_1C_1D_1$ efectuémosle T_2 de manera que se obtenga:

A_2 (−2 ; −2)	B_2 (1 ; −5)	C_2 (−2 ; −8)	D_2 (−5 ; −5)

¿Cuál es T_2?

b) ¿Qué traslación T_3 permite transformar la figura ABCD en la figura $A_2B_2C_2D_2$?

T_3 es la traslación T_1 seguida de la traslación T_2.

En cal capítulo V sobre Leyes de Composición hemos visto que la composición de dos biyecciones es una biyección, situación que se comprueba en el ejercicio precedente, donde:

$T_2 \circ T_1 \quad = \quad T_3$

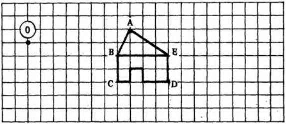
c) ¿Cuál es la traslación que transforma $A_2B_2C_2D_2$ en $A_1B_1C_1D_1$? Corresponderá llamarla T_2^{-1}. ¿Por qué?

d) $T_2^{-1} \circ T_2 = \ ?$

¿Qué transformación produce aplicar sucesivamente a $A_1B_1C_1D_1$ las traslaciones T_2 y T_2^{-1}? La llamaremos T_n.

Ficha 3 Homotecia.

1.- Identificar los caminos reducidos que unen el punto 0 con los vértices A, B, C, D y E de la casita.



Duplicar cada uno de esos caminos. Por ejemplo:

$O \xrightarrow{(8\,;1)} A$

$O \xrightarrow{(16\,;2)} A_1$ (camino doble del correspondiente al trayecto OA, pero siempre a partir de O).

Dibujar la casita que determinan los puntos $A_1B_1C_1D_1E_1$.

La transformación de ABCDE en $A_1B_1C_1D_1E_1$ es una *homotecia* de centro en O y razón 2.

2.- En un par de ejes cartesianos dibujar el triángulo JRT cuyos vértices tengan por coordenadas:

J (2 ;2) , R (4 ;4) , T (6 ;1)

Tomando la intersección de los ejes como centro, aplicarle al triángulo JRT la homotecia H_1 (centro O y razón 3).

Analicemos la relación operacional entre las coordenadas:

$J\ (2;2) \xrightarrow{H_1} J_1\ (\ldots\ldots;\ldots\ldots)$

$R\ (4;4) \xrightarrow{H_1} R_1\ (\ldots\ldots;\ldots\ldots)$

$T\ (6;1) \xrightarrow{H_1} T_1\ (\ldots\ldots;\ldots\ldots)$

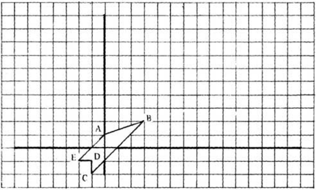
3.- El operador multiplicativo actuante en una homotecia no es necesariamente un número natural. Verificarlo aplicando a JRT una homotecia H_2 de centro O y razón -2.

Las coordenadas de $J_2R_2T_2$ serán:

$J_2\ (-4;-4)$ $R_2\ (\ldots\ldots;-8)$ $T_2\ (-2;\ldots\ldots)$

Aplicar a $J_2R_2T_2$ una homotecia de centro O y razón $\frac{1}{2}$.

4.- Dado el polígono cóncavo ABCDE siguiente



dibujar la figura homotética de él, por H_1 (centro de la intersección de los ejes y razón 3).

$ABCDE \xrightarrow{H_1} A_1B_1C_1D_1E_1$

Transformar $A_1B_1C_1D_1E_1$ por la homotecia H_2 (centro idem a H_1, razón $\frac{2}{3}$)

$A_1B_1C_1D_1E_1 \xrightarrow{H_2} A_2B_2C_2D_2E_2$

a) ¿Cuál es la homotecia H_2 que permite pasar de ABCDE a $A_2B_2C_2D_2E_2$?

$H_2 \circ H_1 \quad = H_3$

b) ¿Cuál es la razón de una homotecia neutra?

¿Cuáles son los datos de H_1^{-1} (inversa de H_1) en el ejercicio de este apartado?

5.- Analizando las homotecias construídas se observa que:

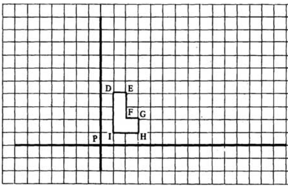
i) los datos de una homotecia son además del elemento a transformar, el **centro** y la **razón**;

ii) la semirrecta que parte del centro y pasa por el punto a transformar, pasa también por el punto transformado;

iii)la distancia del centro al punto transformado es igual a la distancia del centro al punto original multiplicada por la razón.

Ficha 4 Simetría central.

1.-



Transformar la letra L dibujada en la cuadrícula que antecede, por una homotecia H_5 de centro P y razón -1. Llamemos $D_1E_1F_1G_1H_1I_1$ a la figura transformada.

Unir cada vértice con su homotético, ¿qué se observa?

a) Como en toda homotecia, los pares de puntos están alineados con P;

b) las distancias $DP = PD_1$; $EP = PE_1$; $FP = PF_1$; . . . .

$IP = PI_1$.

c) la L original y su transformada tienen las mismas dimensiones; ¿ocurre eso en **toda** homotecia?

El caso especial de homotecia aquí presentado, es una *simetría central* de centro P.

2.- Detallar, comparativamente, las coordenadas de DEFGHI y de $D_1E_1F_1G_1H_1I_1$:

D (2 ; 4) ⟶ D_1	(..... ; .....)	G (..... ; .....) ⟶ G_1	(..... ; .....)
E (3 ; 4) ⟶ E_1	(..... ; .....)	H (..... ; .....) ⟶ H_1	(..... ; .....)
F (..... ; .....) ⟶ F_1	(..... ; .....)	I (..... ; .....) ⟶ I_1	(..... ; .....)

¿Qué cambio se produce en las coordenadas de los puntos de una figura con respecto a las de su figura simétrica?

En general diremos que en una simetría con centro en la intersección de los ejes cartesianos: x^+ se transforma en x^-, y^+ en y^-, x^- en x^+ e y^- en y^+, que puede resumirse de la siguiente manera:

$$x^+ \longleftrightarrow x^-$$
$$y^+ \longleftrightarrow y^-$$

3.- En un par de ejes cartesianos dibujar un cuadrado, considerando al punto de intersección de los ejes como punto de intersección de las diagonales. ¿Qué se observa? **Todo** punto del cuadrado ¿se puede transformar en otro punto del cuadrado por una simetría central?

Se dice que el punto de intersección de las diagonales de un cuadrado es **centro de simetría** del cuadrado.

4.- Dibujar un hexágono regular, un pentágono regular, un rectángulo, un triángulo equilátero, un paralelogramo, un rombo, un octógono regular, un trapecio y un círculo. ¿Cuáles de esas figuras tienen centro de simetría? Determinarlo en cada caso.

5.- Determinar el centro de simetría en los dibujos siguientes: (los dibujos presentados en a) y b) son obras originales de M.C. Escher, que se exponen en la Fondation Escher-Haags Gemeentemuseum de La Haya):

a)

b)

c)

ABCDEFGHIJKLM
NOPQRSTUVWXYZ

Ficha 5 Simetría axial.

1.- Trazar en una cuadrícula un par de ejes cartesianos y ubicar los siguientes puntos: A (2 ; 5), B (2 ; 3), C (3 ; 3), D (3 ; 1), E (9 ; 1), F (5 ; 8), G (3 ; –2), H (7 ; –3), I (5 ; –6).

Trazar la línea cerrada ABCDEFA; cortar el interior de esta poligonal. Cortar también el triángulo GHI.

Plegar la hoja por el eje y y dibujar sobre el otro pedazo de papel las dos figuras, llamando A', B', C', D', E', F', G', H', I' a los nuevos puntos, haciendo corresponder A' con A, B' con B, etc.

Abrir la hoja, trazar las líneas cerradas A'B'C'D'E'F'A' y G'H'I'G'.

¿Cómo está ubicada la recta y^+y^- respecto de los segmentos AA', BB', CC', DD', EE', FF', GG', HH', II'?

Escribir las coordenadas de los puntos A', B', C', D', E', F', G', H', I'.

Diremos que se pasa de A a A', de B a B', de C a C', etc. por una *simetría axial* respecto del eje y llamado **eje de simetría.**

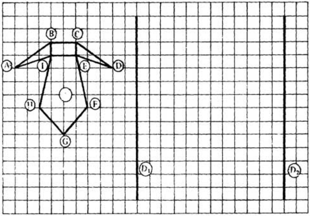
Comparando las coordenadas de la figura ABCDEF y las A'B'C'D'E'F' se observa que x^+ se transforma en x^- y x^- en x^+, y que el valor de y no cambia. Esto se puede resumir como sigue:

$$x^+ \longleftrightarrow x^-$$
$$y \longleftrightarrow y$$

¿Cómo se transforman las coordenadas si se considera el eje X como eje de simetría?

2.- De las figuras de la ficha 4.4 ¿cuáles tienen eje de simetría? Idem para los dibujos del apartado 5.

3.- Transformar la figura (1) por una simetría S_{1A} con respecto a la recta D_1. Se obtiene la figura (2). Transformar la figura (2) por una simetría S_{2A} respecto a la recta D_2. Se obtiene la figura (3).



$$\text{fig. } 1 \xrightarrow{S_{1A}} \text{fig. } (2)$$

$$\text{fig. } 2 \xrightarrow{S_{2A}} \text{fig. } (3)$$

Unir cada punto de (1) con su transformado por la composición de S_{1A} seguida de S_{2A} (fig 3).

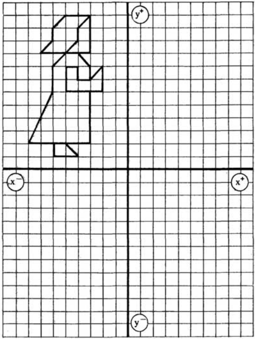
Los segmentos obtenidos ¿son paralelos? ¿Tienen la misma longitud?

Al responder estas preguntas se verifica que **la composición de dos simetrías axiales de ejes paralelos es una traslación.**

La **composición** realizada ¿es una operación conmutativa?

$S_{2A} \circ S_{1A} \; ? \; S_{1A} \circ S_{2A}$

4.- A la figura ~~siguiente,~~ ubicada en un par de ejes cartesianos X e Y, le aplicaremos transformaciones sucesivas:



a) A la figura ① efectuarle una simetría axial con eje en Y (que indicaremos S_yA)

fig. ① $\xrightarrow{S_yA}$ fig. ②

b) Sea S_xA una simetría axial de eje en X. Obtener la figura ③

fig. ② $\xrightarrow{S_xA}$ fig. ③

c) Llamemos S'_yA a la simetría axial que transforma la figura ③ en la figura ④.

d) Describir el movimiento que transforma la figura ④ en la figura ①.

e) ¿Qué movimiento transforma la figura ① en la figura ③ ?

Es decir que:
$S_xA \circ S_yA = S_OC$ (simetría central de centro en O, intersección de los ejes X e Y).

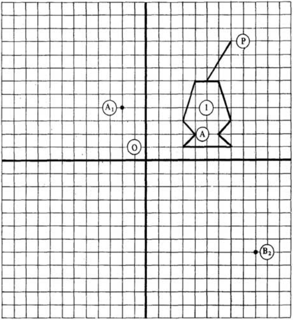
Eso ocurre únicamente si las simetrías axiales compuestas tienen ejes . . . .
La composición de dos simetrías axiales de ejes perpendiculares ¿es una operación conmutativa?

5.- Sugerimos al lector realizar composiciones diversas de las transformaciones descriptas en este capítulo, ya que las posibilidades matemáticas y pedagógicas son muy amplias. Analizaremos una de esas posibilidades en la ficha siguiente.

Ficha 6 Rotación.

En esta ficha presentaremos otra transformación, que puede analizarse desde distintos puntos de vista; cada uno de ellos con múltiples actividades y brindando numerosos aspectos matemáticos de la transformación. Compartimos plenamente los principios pedagógico-matemáticos de Dienes (que él llama de "variabilidad matemática" y de "variabilidad perceptual"), que propician presentar una misma noción desde distintos ángulos que permitan al estudiante realizar la abstracción síntesis del concepto matemático, apoyándose en diversas concretizaciones que eliminan el estereotipo en la ejercitación.

1.- En un par de ejes cartesianos, determinar las coordenadas de un mate como el de la figura siguiente:



a) Aplicar la siguiente regla de transformación a cada una de las coordenadas del mate: (se obtiene la figura 2).

$$R_1 \begin{cases} x^+ \longrightarrow y^+ \\ y^+ \longrightarrow x^- \\ x^- \longrightarrow y^- \\ y^- \longrightarrow x^+ \end{cases}$$

Por ejemplo:

$$A\ (4\,;2) \xrightarrow{R_1} A_1\ (-2\,;4)$$

b) Aplicar a la figura 1 la regla de transformación R_2, para obtener la figura 3

$$R_2 \begin{cases} y^+ \longrightarrow x^+ \\ x^+ \longrightarrow y^- \\ y^- \longrightarrow x^- \\ x^- \longrightarrow y^+ \end{cases}$$

Por ejemplo:

$$B\ (7\,;9) \xrightarrow{R_2} B_2\ (9\,;-7)$$

En este ejercicio hemos efectuado dos *rotaciones*. En el item a) la rotación es en **sentido** anti-horario, es decir, contrario al de las agujas de un reloj, y en el item b) la rotación es de sentido horario (similar al de las agujas de un reloj).

Otros elementos imprescindibles para precisar rotaciones son el **centro de rotación** (en los dos ejemplos presentados ese punto es O, intersección de los ejes cartesianos) y el **ángulo de rotación** (en los dos ejemplos es de 90º).

$$R_1 \begin{cases} \text{centro de rotación O} \\ \text{ángulo de rotación } 90^o \\ \text{sentido de rotación anti-horario} \end{cases}$$

$$R_2 \begin{cases} \text{centro de rotación O} \\ \text{ángulo de rotación } 90^o \\ \text{sentido de rotación horario} \end{cases}$$

c) Aplicar al mate de la figura 3 una rotación R_3, con los siguientes datos, para llegar a la figura 4 :

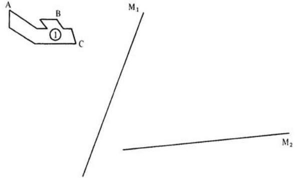
$$R_3 \begin{cases} \text{centro de rotación O} \\ \text{ángulo de rotación } 90^o \\ \text{sentido de rotación horario} \end{cases}$$

La regla de transformación de coordenadas es:

$$\begin{array}{ccc} y^+ & \longrightarrow & x^+ \\ \uparrow & & \downarrow \\ x^- & \longleftarrow & y^- \end{array}$$

similar al movimiento efectuado en b). **Atención:** similar como transformación (igual centro, igual sentido, igual amplitud) pero aquí planteada para partir de la figura 3 y llegar a una figura 4 .

2.- En el dibujo que sigue, las rectas M_1 y M_2 serán ejes de simetría:



a) Aplicar a la figura 1 la simetría axial de eje M_1.

$$\text{fig. } 1 \xrightarrow{S_{M1}} \text{fig. } 2$$

b) Transformar la figura 2 por la simetría axial de eje M_2.

$$\text{fig. } 2 \xrightarrow{S_{M2}} \text{fig. } 3$$

c) ¿Qué transformación aplicada a la figura 1 permite obtener directamente la figura 3?

$$\text{fig. } 1 \xrightarrow{?} \text{fig. } 3$$

Se trata evidentemente de una rotación de centro en el punto O de intersección de los ejes de simetría.

La determinación práctica del ángulo de rotación, cuando se conocen la figura original y su transformada, además del centro de rotación, se efectúa de la siguiente manera:

i) unir un punto de la figura 1 con el centro Q de rotación (por ejemplo: A);
ii) unir el transformador de A (A_2) con el centro Q de rotación;
iii) medir el ángulo $A\hat{Q}A_2$:
iv) repetir la construcción con otros puntos de la figura 1 y su rotada, figura 3;
v) se comprueba que:

$$A\hat{Q}A_2 = B\hat{Q}B_2 = C\hat{Q}C_2 \ldots\ldots$$

vi) la medida de esos ángulos es la del ángulo de rotación.

d) Medir el ángulo que forman los ejes de simetría M_1 y M_2. ¿Qué relación aritmética existe entre ese ángulo y el ángulo de rotación?

e) Resumiendo lo verificado en este ejercicio, podemos señalar:

La composición de dos simetrías axiales es una rotación de centro .... y ángulo de rotación igual a ....

En el apartado 4 de la ficha anterior, definimos la simetría central como composición de dos simetrías axiales de ejes perpendiculares.

Podemos afirmar entonces que toda simetría central es una rotación de centro en .... y ángulo de rotación ....

3.- Hasta aquí hemos analizado las rotaciones en función de las coordenadas en un par de ejes cartesianos y como composición de simetrías axiales.

Se puede recurrir a un procedimiento práctico y rápido de comprobación de rotaciones y aún de determinación de las figuras transformadas, con dibujos en papel transparente. Por ejemplo:

a) Calcar el mate del apartado 1, marcando el centro de rotación O.

b) Apoyando el papel transparente en O, y tomando como base la semirrecta que une O con un punto cualquiera del mate (por ejemplo B) hacer girar el papel transparente 90º en sentido horario.

c) Se comprueba que el mate calcado de la figura 1 coincide con el mate de la figura 3.

Así podemos verificar rápidamente la exactitud de la rotación efectuada, si se conocen los datos de la misma y la figura transformada. Si sólo se conocen los datos de la rotación y la figura que se desea rotar, se procede así:

i) se calca la figura a rotar y se fija el centro de rotación;

ii) se une un punto cualquiera x de la figura original con el centro de rotación R;

iii) a partir de esa semirrecta R_x se mide el ángulo de rotación, en el sentido de los datos de la misma, determinando una semirrecta OX' a partir de O;

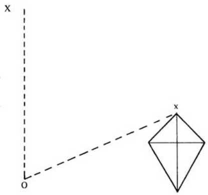
iv) se determina x_1 en la semirrecta OX', con la condición $\overline{OX_1} = \overline{OX}$;

v) a partir de X_1 (transformado de X) se calca la figura del papel transparente, con especial cuidado de hacer coincidir el X del original calcado con la posición X_1.

d) Verificar este procedimiento en cualquiera de las rotaciones del mate.

e) Repetir el proceso con el avión del item 2.

f) Aplicar la rotación R, de centro en O y ángulo anti-horario de 60° a la siguiente figura (emplear papel transparente y calcar.)



Ficha 7 Composición de transformaciones.

En este capítulo VIII sobre transformaciones geométricas, hemos trabajado algunos movimientos isométricos, es decir, que la figura original y su transformada son congruentes (traslación, simetrías y rotación) y la homotecia, que la única medida que conserva inalterable es la de los ángulos.

Por principios pedagógicos básicos, se han presentado distintos puntos de vista para analizar los movimientos: operadores actuantes sobre las coordenadas, transformaciones producidas en las coordenadas, calcado y desplazamiento de figuras, combinación de transformaciones para definir una nueva, etc.

Como cierre del tema, planteamos a continuación una ficha tratando de sintetizar en ella algunos de los aspectos que avalan con firmeza el tratamiento de las transformaciones geométricas y en particular la composición de isometrías. Al resolver los ejercicios siguientes, el lector recurrirá a sus conocimientos sobre elementos del espacio, caracterización de las transformaciones, funciones y en particular leyes de composición interna, para culminar con la identificación de la estructura algebraica que caracteriza a la composición de isometrías planteada.

1.- En un par de ejes cartesianos ortogonales, ubicar los siguientes puntos:

A (1 ;2), B (4 ;5), C (3 ;5), D (3 ;6), E (2 ;6), F (2 ;5), G (1 ;3).

Llamaremos 1 a la figura ABCDEFG.

a) Aplicar a la figura 1 la siguiente regla de transformación de coordenadas:

$$U \left\{ \begin{array}{l} x^+ \longleftrightarrow y^+ \\ x^- \longleftrightarrow y^- \end{array} \right.$$

fig. 1 $\xrightarrow{U}$ fig. 2

¿Qué transformación geométrica es U? ¿Cuáles son sus datos identificatorios?

b) Aplicar a la figura 1 otra regla de transformación de coordenadas:

$$V \left\{ \begin{array}{l} x^+ \longleftrightarrow y^- \\ y^+ \longleftrightarrow x^- \end{array} \right.$$

fig. 1 $\xrightarrow{V}$ fig. 3

¿Qué tipo de transformación es V? Precisar sus datos.

c) Partiendo nuevamente de la figura 1 , aplicarle la regla Z a sus coordenadas:

$$Z \left\{ \begin{array}{l} x^+ \longleftrightarrow x^- \\ y^+ \longleftrightarrow y^- \end{array} \right.$$

fig. 1 $\xrightarrow{Z}$ fig. 4

¿Qué movimiento es Z? Caracterizarlo.

d) Si a las coordenadas de la figura 1 se les aplica:

$$N \left\{ \begin{array}{l} x^+ \longleftrightarrow x^+ \\ x^- \longleftrightarrow x^- \\ y^+ \longleftrightarrow y^+ \\ y^- \longleftrightarrow y^- \end{array} \right.$$

fig. 1 $\xrightarrow{N}$ fig. ....

Si se aplica N a cualquiera de las figuras (1 , 2 , 3 , 4) de este ejercicio, se obtiene la misma figura. Es decir que N es transformación neutra.

e) Efectuar todas las transformaciones definidas en esta ficha, a las cuatro figuras obtenidas. Completar el siguiente esquema:

1 $\xrightarrow{U}$	1 $\xrightarrow{V}$ ....
2 $\xrightarrow{U}$	2 $\xrightarrow{V}$ ....
3 $\xrightarrow{U}$	3 $\xrightarrow{V}$ 1
4 $\xrightarrow{U}$ 3	4 $\xrightarrow{V}$ ....

(1) $\xrightarrow{Z}$ 4
(2) $\xrightarrow{Z}$ ....
(3) $\xrightarrow{Z}$ ....
(4) $\xrightarrow{Z}$ 1

(1) $\xrightarrow{N}$ ....
(2) $\xrightarrow{N}$ ....
(3) $\xrightarrow{N}$ ....
(4) $\xrightarrow{N}$ (4)

fig. (4) U fig. (3) V fig. (1)

resumiendo:

V o U$_{(\text{fig. } (4))}$ = fig. (1)

¿Qué transformación (U, V, Z o N) permite pasar de la figura (4) a la figura (1)?
Es decir:

V o U = Z

f) Completar la tabla operacional de la composición de las transformaciones U, V, Z y N.

o	N	U	V	Z
N				
U				
V				
Z				

g) i) la ley "o" ¿es de composición interna?
ii) ¿es conmutativa?
iii) ¿tiene elemento neutro? ¿Cuál es?
iv) ¿cuál es el inverso de cada transformación?
v) ¿es asociativa?
vi) ¿qué estructura algebraica tiene la composición "o" de las transformaciones U, V, Z y N?

h) Resolver las siguientes ecuaciones en:

$\langle \{ U, V, Z, N \} , o \rangle$:

V o .... = Z
.... o U = V

U o (N o V) =
(U o Z) o .... = N

2.- La posibilidad de combinación de movimientos es enorme, sugerimos al lector plantearse algunas, y realizar el estudio estructuralista de la composición de funciones que allí surjan. No es necesario localizar las figuras por coordenadas, lo que sí es imprescindible, la total identificación de los movimientos y sus elementos definitorios (centro, ángulo, eje, amplitud, etc.). Puede trabajarse con más de cuatro movimientos, lo que irá enriqueciendo el estudio general del tema, y sus vinculaciones particulares. En los tres volúmenes de su obra "Geometría a través de las transformaciones", Zoltan P. Dienes presenta gran variación de ejercicios que culminan (especialmente en el tomo tres "Grupos y coordenadas") con la comparación completa de los aspectos geométrico-algebraicos básicos. Sintetizamos algunos de los problemas allí planteados, en el siguiente enunciado.

3.- Dibujar un triángulo equilátero JLV.

a) Llamemos A, B y C a los movimientos que transforman los vértices del triángulo de la siguiente manera:

A		B		C	
J	J	J	V	J	L
L	V	V	J	L	J
V	L	L	L	V	V

¿Qué tipo de transformaciones son A, B y C?

b) Llamemos R, D y N a los movimientos que efectúan las siguientes transformaciones a los vértices de JLV.

R		D		D	
J	L	J	V	J	J
L	V	L	J	L	L
V	J	V	L	V	V

¿Qué tipo de transformaciones son R, D y N?

c) El conjunto $\{A, B, C, R, D, N\}$ con la operación ¤ (seguido de) ¿tiene estructura de grupo?

9

Medida y medición

Ficha 1 Comparaciones cualitativas y cuantitativas. Reconocimiento de las magnitudes.

1.- Dado el siguiente conjunto A de elementos, clasificar estos según distintos criterios.

a) Emplear un diagrama de Carroll para clasificar por forma.

b) En un diagrama de Venn, clasificar los elementos en "comestibles y no comestibles".

c) Mediante un diagrama de árbol, clasificar los elementos de A por su peso.

2.- De las numerosas propiedades que pueden tenerse en cuenta para clasificar los elementos de A, hay algunas (por ejemplo la solicitada en c) que permite determinar cada clase en función de la medida (Nº de gramos).

¿Qué es medir?

En el fascículo 15 (Medida) de la serie "Tópicos de matemática para la enseñanza elemental" del Consejo Nacional de Profesores de Matemática de Estados Unidos (Editorial Trillas, Méjico, noviembre de 1970) se lee:

"El lenguaje de la medida es el lenguaje de la comparación y la medida surge de la comparación".

No es ésta una definición, sino una explicación práctica de cómo debe introducirse en el aspecto empírico de un denso tema matemático (y físico) como es el de las magnitudes.

Partiendo del principio que "comparar es medir", creemos conveniente distinguir lo que son comparaciones **cualitativas** y comparaciones **cuantitativas.**

a) Responder a las siguientes preguntas:

i) ¿Tiene más caudal el río Limay o el río Negro?
ii) ¿Es más linda una rosa o un clavel?
iii) ¿Tiene más habitantes Córdoba o Río Gallegos?
iv) ¿Qué mina de lápiz es más dura; 2H o 3B?
v) ¿Quién es mejor futbolista: Kempes o Maradona?
vi) ¿Qué ciudad es más atrayante: Hong-Kong o Méjico?

b) Todos los lectores ¿responderán de la misma manera a las seis preguntas?

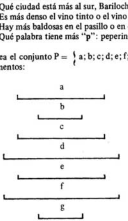
Evidentemente no, porque las comparaciones planteadas en ii), v) y vi) se refieren a temas no fácilmente cuantificables. Se trata, en esos casos, de comparaciones cualitativas. En cambio las restantes, que son cuantitativas, permiten una solución precisa.

3.- En este capítulo trabajaremos con comparaciones cuantitativas, que son las que, respondiendo a la pregunta ¿Cuánto? permiten **medir**, cuando se clasifica objetos por una propiedad común (la magnitud).

4.- Nombrar la propiedad que se compara, en cada uno de los siguientes ejemplos:

a) ¿Cuánto más tarde anochece el 2 de marzo que el 19 de junio?
b) ¿Qué ciudad está más al sur, Bariloche o Comodoro Rivadavia?
c) ¿Es más denso el vino tinto o el vino blanco?
d) ¿Hay más baldosas en el pasillo o en el living?
e) ¿Qué palabra tiene más "**p**": peperina o paralelepípedo?

5.- a) Sea el conjunto $P = \{ a; b; c; d; e; f; g \}$ donde los elementos son los siguientes segmentos:



i) Aplicar la relación $\mathcal{L}$: "es tan largo como" en "P".
ii) ¿Qué propiedades tiene esa relación?
iii) ¿Qué tipo de relación es?
iv) ¿Cuántas clases quedan determinadas?

b) Llamemos X, Y, Z a las clases de equivalencia obtenidas en P al aplicar $\mathcal{L}$.
Podemos expresar:
longitud a = longitud c = longitud e
También se puede afirmar que los segmentos a, c y e tienen igual *longitud*.

Atención: aún no se ha determinado **cuánto** mide cada segmento, sólo se los ha comparado obteniendo las clases de equivalencia.

6.- Volvamos al conjunto A de objetos, citado en el punto 1. Aplicar en "A" la relación $\mathcal{R}$: "es tan pesado como".

a) ¿Es una relación de equivalencia? ¿Por qué?

b) ¿Cuáles son las clases obtenidas?

c) Si peso (o masa) de "x" = peso (o masa) de "y" ¿qué elementos de "A" pueden ser "x" e "y"?

d) Si peso de "u" > peso de "v" > peso de "w" ¿qué elementos de "A" pueden ser "u", "v" y "w"?

e) Utilizando una balanza de dos platillos, comparar los pesos de todos los elementos de "A". ¿Se pueden ordenar esos elementos por peso (de menor a mayor, por ejemplo sin conocer su peso en gramos?

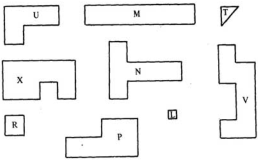
f) Un conocido "problema de ingenio" señala que: dadas 7 bolitas de igual apariencia (tamaño y color), si se sabe que una sola de ellas es de diferente peso que las restantes ¿cuántas pesadas, como mínimo, son necesarias para precisar cuál es la bolita diferente utilizando balanza de dos platillos? ¿Cuántas bolitas hay que comparar en cada pesada?

Este problema se basa en la comparación como medición, y en la individualización de los elementos de una clase de equivalencia, como así también en las propiedades de una relación de orden.

7.- Plantear una situación concreta para presentar comparaciones que lleven a trabajar la magnitud capacidad, y con ella una relación de equivalencia y una relación de orden.

Ficha 2 Medición con unidades no convencionales.

1.- Dadas las siguientes **superficies**, clasificarlas teniendo en cuenta, para cada una de ellas su área (medida de la superficie).



a) ¿Cuántas clases de equivalencia surgen?
b) ¿Cómo se procede para determinar que "P", "M" y "N" pertenecen a una misma clase?

¿En qué se basa la comparación?

Al clasificar objetos por la magnitud longitud (cap. IX, ap. 5) hemos visto que la simple comparación permite la determinación de las clases equivalentes por longitud. Cuando se trabajó la magnitud masa (o peso) en el apartado 6 de la misma ficha se comprobó que el uso de la balanza de dos platillos es suficiente para que, verificando la existencia de equilibrio de elementos (a partir de una guía), se determinen las clases equivalentes por masa.

Si se desea comparar superficies para determinar las clases de elementos equivalentes por área, no siempre son evidentes las semejanzas de esos elementos (áreas equivalentes) o las diferencias (el objeto "a" tiene mayor área que el "b"). A veces la observación visual nos suministra bases para apreciaciones erróneas (por distancia, ángulo de enfoque o simple estimación falsa).

Puede recurrirse a dibujar las superficies en un mismo tipo de papel y utilizando una balanza de gran sensibilidad, comparar la masa (o peso). En esas condiciones dos superficies que pesan lo mismo serán equivalentes en cuanto a su área.

La posibilidad certera, rápida y cómoda para determinar los grupos de elementos de igual área, está en recurrir a la aplicación de una misma unidad de medida a los objetos a comparar especificando, en cada caso, el número de veces que esa unidad es utilizada para cubrir la superficie del objeto. Tal vez sea conveniente recalcar que esa unidad debe ser utilizada en cuanto a la magnitud que se desea comparar; es decir, en este caso, una figura de la cual no importa su color, ni su forma, ni el peso del papel en el cual está dibujada, sino su cantidad de superficie o área.

2.- Tomemos como superficie-unidad a "L". Podemos señalar que: la medida de R con respecto a L es 4, que abreviadamente expresamos:

med R/L = 4	med P/L =
med N/L =	med X/L =
med M/L =	med U/L =
med V/L =	med T/L =

4 es el **área de la superficie** R expresada en "L" que en lenguaje habitual y abusivo se indica:

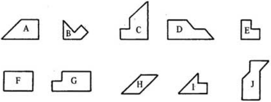
sup R = 4 L

3.- Completar las siguientes expresiones:

med P/R =	med N/R =
med M/R =	med U/R =
med X/R =	med V/R =
med R/R =	med T/R =
med L/R =	

4.- Repetir el ejercicio del apartado 3, tomando como superficie-unidad a "T"

5.- Recortar en cartulina o papel las figuras R, T y L del apartado 1.
Usando esas unidades, medir las siguientes figuras:



Para efectuar la medición deben tenerse en cuenta las siguientes consignas:

a) comenzar usando "R" en todos los casos en que el tamaño de la figura a medir lo permita;

b) si no es posible emplear "R", recurrir a "T";

c) cuando la figura sea muy pequeña y no resulte posible medir con "R" o "T" como unidades, emplear "L";

d) observar que se presentan casos en que, a simple vista, no es posible usar "T", pero que si se toma la mitad de "T" ($\frac{1}{2}$ T) se llega a ubicar dos veces esa mitad, con lo cual:

$\frac{1}{2}\,T + \frac{1}{2}\,T = \frac{2}{2}\,T = 1\,T$

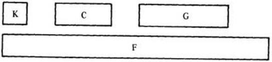
(lo mismo puede ocurrir para R ...)

e) Completar la siguiente tabla, indicando para cada figura, el número de unidades de cada clase que requirió su medición.

Figuras / unidades	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
R				1		1				
T				1		1				
L				1		0				

Ficha 3 Sistemas de medición. SIMELA.

Recortar en cartulina las siguientes bandas, de 1 cm. de ancho, que emplearemos para medir longitudes.



1.- Primeramente comparemos las longitudes de K, C, G y F entre sí.

a) med.C/K =
   med G/C =
   med F/G =

b) med G/K =
   med F/C =
   med F/K =

c) med K/C =
   med C/G =
   med G/F =
   med K/G =
   med K/F =
   med C/F =

2.- Al comparar las longitudes de K, C, G y F entre sí, se observa que:

a) C es el triple de K; luego K es .... de C.

b) G es el triple de C; luego C es .... de G.

c) F es .... de G; luego G es $\frac{1}{3}$ de K.

d) ¿Qué parte de G es K? ....;
luego K es .... de G.

Completar el cuadro siguiente según la relación "x es tantas veces y".

Por ejemplo:

F es 9 veces C

K es $\frac{1}{3}$ de C

	K	C	G	F
K				
C	3			
G				$\frac{1}{3}$
F				

Diremos que F es **múltiplo** de K, C, G y F; G es **submúltiplo** de F y **múltiplo** de C y K.

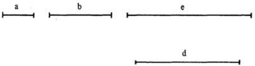
C es submúltiplo de .... y múltiplo de ....

· Explicar el significado de las palabras múltiplo y submúltiplo.

3. Comparando las respuestas precedentes con lo estudiado en el capítulo VI ficha 1, el lector encontrará cierta similitud entre la relación numérica de las unidades K, C, G y F y los agrupamientos en base tres. Precisamente por ello emplearemos la numeración en base tres, para **codificar** las mediciones con las unidades K, C, G y F.

Para dar precisión a la tarea, deberá utilizarse cada unidad de medida el **menor número posible de veces**. Veamos algunos ejemplos para clarificar mejor la situación.

4.- Con las unidades de longitud K, C, G y F medir los siguientes segmentos:



	F	G	C	K
a				2
b				
d		1	0	2
e				

Se observa que:

med d/K = 102 que suele indicarse abusivamente d = 102 K

En este caso hemos considerado a K como unidad de medida. Si se elige C como unidad de medida será:

med d/C = 10,2 ó d = 10,2 C

De la misma manera

med d/G = 1,02 ó d = 1,02 G

Si la medida de "d" es 0,102 ¿Cuál ha sido la unidad de medida considerada?

Se ve así que la medida es un número con coma; el lugar de la coma indica la unidad de medida elegida.

Resumiendo:

x designa el segmento	bandas utilizadas F	G	C	K	med x/K	med x/C	med x/G	med x/F
a								
b								
d	0	1	0	2	102	10,2	1,02	0,102
e								

5.- Hemos presentado en esta ficha, un ejemplo de sistema de medición de longitudes en el cual la relación entre las diferentes unidades es similar a la que rige un sistema de numeración en base 3. Además, la codificación (o escritura de las cantidades) tiene leyes isomorfas con las empleadas en base 3. El ejercicio tiene por finalidad hacer reflexionar sobre la arbitrariedad de las unidades por un lado (podría también haberse seleccionado unidades que difieran de acuerdo a los valores numéricos de otras bases), y también sobre la necesidad de un código de vinculación entre la unidad elegida y sus múltiplos y submúltiplos.

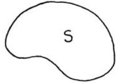
El SIMELA (Sistema métrico legal argentino, ley 19.511 del 7/3/72) presenta las unidades siguientes para longitud, capacidad y peso, regidas por las leyes de la base decimal de numeración:

	unidad	símb.	múltiplos	submúltiplos
LONGITUD	metro	m	dam – hm km – Mm	dm – cm mm – μm
CAPACIDAD	litro	l	dal – hl kl	dl – cl ml
PESO	gramo	g	dag – hg kg – q – t	dg – cg mg

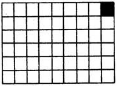
Completar los datos precedentes, buscar las unidades, múltiplos y submúltiplos que establece el SIMELA para superficies y volúmenes.

6.- Para medir cualquier magnitud, pueden elegirse unidades no convencionales (también las convencionales del SIMELA, por supuesto). En este ejercicio mediremos superficies con unidades no convencionales.

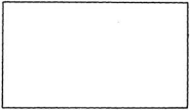
Sea "S" la superficie a medir:



a) Dibujar en papel transparente la siguiente malla cuadriculada C_1, de cuadrado unidad "u".



i) Superponer C_1 sobre "S", ubicando C_1 en la posición horizontal siguiente:

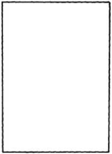


¿Cuál es la medida de S con respecto a **u**?

Observamos que, siguiendo la malla C_1, podemos dibujar un encuadramiento de S por defecto (S queda circunscripta al encuadramiento) y otro encuadramiento de S por exceso(S queda inscripta al encuadramiento). Podemos afirmar:

$26 < \text{med}_u\ S < 52$

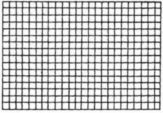
ii) Cambiando la posición de C_1 con respecto a S, y dibujando los encuadres por exceso y por defecto se obtiene:



$27 < \text{med}_u\ S < 49$

iii) Es importante recalcar que en los dos casos precedentes, la superficie S es la misma, y también la unidad "**u**". Las diferencias numéricas obtenidas surgen al variar la posición, y porque la medición no es perfecta. ¿Qué ocurrirá si la unidad de medida es más pequeña?

b) Dibujar en papel transparente la malla cuadrangular C_2, de cuadrado unidad **u'**.



(u' es cuatro veces más pequeña que u).

Superponer C_2 sobre S. ¿Cuál es la medida de S con respecto a **u'**?

$124 < med_{u'}$ S,S < 171

Recordando que u' es la cuarta parte de u, podemos indicar:

$124 = 4 \times 31$

$171 = (4 \times 42) + 3$

por lo que:

$31 < med_u \;\; S < 43$

c) Comparando los resultados obtenidos en a) y b) para medir **una misma superficie** con **una misma unidad** tenemos:

$26 < med_u \;\; S < 52$

$27 < med_u \;\; S < 49$

$31 < med_u \;\; S < 43$

El valor de la medida de S está en todos los casos, comprendido entre máximo y mínimo. Al precisar la medición, el intervalo se reduce, y cada vez se acerca más al valor del área.

En realidad, en este ejemplo, como en cualquier otro de medición concreta, el valor numérico de la misma es aproximado y depende de la mayor o menor precisión del instrumento de medición.

Ficha 4 La función "medida". Ejercicios.

En este capítulo sobre "medida y medición" intentamos presentar al lector los aspectos que consideramos importantes para planificar la enseñanza del tema a niños de primaria. No es suficiente (en nuestra concepción educativa) hacer conocer al alumno los elementos del SIMELA y adiestrarlos en un manejo adecuado de los mismos, como tampoco lo es el dar una referencia histórica que finalice en abogar por las ventajas sociales de utilizar universalmente un sistema métrico decimal. La destreza en el manejo de unidades convencionales de medición es un objetivo específico del tema; el proceso histórico hasta la convención mundial es un recurso pedagógico interesante; pero el concepto de medida y medición se adquiere en una serie de etapas que incluyen: identificar las magnitudes, determinar (para cada magnitud) clases de equivalencia por comparación, ordenamiento de clases, ventajas de la medición para comparar, unidades no convencionales y convencionales, codificación de la escritura de cantidades en función de la relación unidad-múltiplos-submúltiplos y aproximación a la medida por acotación de intervalos.

1.- No queremos terminar el tema "medida y medición" sin destacar una vinculación básica de él con el concepto matemático de función, que desarrolla André Myx en "Six themes pour six semaines" (ediciones Cedic, Lyon, Francia, 1975).

Dado un conjunto M de objetos a_1, a_2, a_3, etc., se llama *medida* a una función de M hacia el conjunto R de números reales.

R es un conjunto numérico que, además de incluir al conjunto Q de los números racionales, incluye a números como π (medida de la longitud de la circunferencia con respecto al diámetro), $\sqrt{2}$ (medida de la diagonal de un cuadrado con respecto al lado del mismo) etc.

La función ***F*** debe verificar las siguientes propiedades (provenientes de la descripción física de la función):

M_1: $\text{med}(\phi) = 0$

M_2: si los objetos a_1 y a_2 son disjuntos, entonces

$\text{med}(a_1 \cup a_2) = \text{med}\ a_1 + \text{med}\ a_2$

Estos conceptos teóricos (algo alejados de la tónica impresa a este libro) son de gran valor cuando se estudia en física el tema magnitudes.

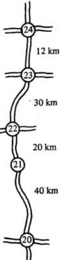
Por ejemplo: la temperatura ¿es una magnitud? ¿se cumple M_1 al tratar temperaturas? ¿y M_2? ¿es cierto que 30° de temperatura agregados a 70° de temperatura permiten llegar a 100°?

Algunos físicos llaman magnitudes medibles a las magnitudes que cumplen con las condiciones M_1 y M_2 y magnitudes comparables, a aquellas para las cuales no se cumple M_2.

2.- *Ejercicios.*

a) Se mide en forma aproximada la longitud de una avenida haciendo 115 pasos iguales que se calcula son de 90 cm. cada uno. Se verifica la medición con una cinta de un doble decámetro. Se marca 4 veces la cinta y 12 m. más. ¿Cuál fue el error en la longitud media de un paso?

b) Sobre la autopista se han numerado las salidas.



i) ¿Cuál es la menor distancia entre dos salidas indicadas sobre esta parte de autopista? ¿Cuál es la mayor distancia entre dos salidas?

ii) Un auto anda a 60 km/h ¿Qué distancia habrá recorrido en $\frac{1}{2}$ h?

¿Qué distancia recorrerá en 20 minutos?
¿Qué distancia recorrerá en 2 hs.?

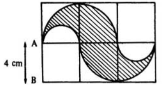
iii) Otro auto anda a 120 km/h. ¿En cuánto tiempo recorre 60 km? ¿Y 6 km? ¿Y 10 km? ¿Y 40 km?

iv) Un auto viejo recorre la distancia comprendida entre 22 y 23 en $\frac{1}{2}$ h. ¿A qué velocidad anda?

v) Un auto azul ha puesto 10 minutos para llegar de 23 a 24 ; un auto gris ha tardado $\frac{1}{4}$ de hora para llegar de 21 a 22 ; una camioneta negra ha tardado $\frac{1}{2}$ hora para llegar de 21 a 23 .
¿A qué velocidad va el vehículo más rápido?
¿Cuál anda más lentamente?

vi) Un automovilista pasa por la salida 20 a las 14 hs. Quiere llegar a la 21 a las 14 hs. 30 minutos. ¿A qué velocidad debe correr?

c) i) Calcular la longitud "L" de la línea que limita la superficie sombreada. Calcular el área "S" de la superficie sombreada.

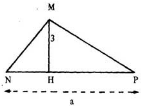


ii) ¿Cómo varían "L" y "S" si se duplica $\overline{AB}$?
iii) ¿Y si $\overline{AB} = 16$ cm?

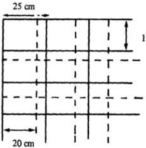
d) MNP es un triángulo de altura MH; MH = 3 cm; "a" es la medida en cm. de la base NP. Hacer una figura para cada valor de "a" de las que figuran en la tabla siguiente. Calcular para cada triángulo la superficie en cm^2.

a	2	3	4	6	12
A					

Las dos series obtenidas en la tabla ¿son proporcionales?

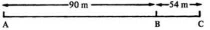


e) Las dimensiones de una cocina rectangular son tales que se pueden medir usando únicamente baldosas rectangulares de 25 cm. x 15 cm. dispuestas como indica la figura, o baldosas cuadradas de 20 cm. de lado. ¿Cuáles pueden ser las dimensiones de esta cocina? En el caso particular de que esta cocina sea cuadrada ¿cuál puede ser la medida de su lado?



f) Una caja de forma de paralelepípedo rectangular de 24 cm. x 36 cm. x 60 cm. se llena exactamente con cubos donde su arista tiene por medida un número natural. Buscar la medida de esos cubos (hay varias respuestas).

g) En una hilera de árboles, éstos están separados regularmente por un número entero de metros. Se arrancan algunos de ellos quedando sólo 3: A, B y C dispuestos como indica al dibujo:



¿Qué distancia separaba dos árboles consecutivos? ¿Cuántos fueron arrancados?

h) Un tanque de agua tiene la forma de un paralelepípedo rectangular. Las dimensiones de la base son 80 cm y 120 cm. La altura es de 250 cm.

i) ¿Cuál es en m^3 el volumen del tanque?

ii) Si contiene 1920 l., ¿qué altura alcanza el líquido en él?

iii) Si se agregan 100 l., calcular el aumento de altura del agua.

j) i) ¿Cuántas veces debo verter el contenido de una pipeta de 25 cm^3 para llenar una botella de $\frac{1}{2}$ litro?

ii) Quiero poner 2 litros de agua en un recipiente. Dispongo de una botella de 75 cl. y de una probeta de 100 cm^3, ¿cómo hago?

k) i) Para medir el volumen de un medicamento líquido, se utiliza una pipeta graduada: 30 gotas representa 1,5 ml. del líquido. El enfermo debe tomar 35 gotas tres veces por día durante 30 días. Un frasco contiene 50 ml., ¿cuántos debe comprar para su tratamiento?

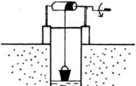
ii) La pipeta es cilíndrica,30 gotas representa una altura de 58 mm. de líquido. Calcular su diámetro interior.

l) Sobre una botella de un líquido concentrado para revelar fotografías se lee: "Solución: 1 + 10", que significa que 1 cm^3 de este líquido debe ser mezclado con 10 cm^3 de agua para obtener una solución lista para usar.

Para revelar un rollo de 36 fotos, se necesitan 330 cm^3 de la mezcla. ¿Cómo se prepara? La misma pregunta si se necesitan 495 cm^3.

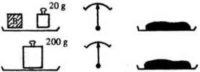
m) Un pozo cilíndrico tiene 1,60 m. de diámetro interior. Se saca el agua por medio de un balde atado a una cadena enrollada sobre un torno de 10 cm. de radio. Se ha desenroscado la cadena justo hasta que el fondo del balde toque la superficie del agua.

Después de una sequía el nivel del agua ha bajado y es necesario entonces darle 5 vueltas más al torno para que el fondo del balde esté sobre el nivel del agua. ¿En cuánto disminuye el volumen del agua?

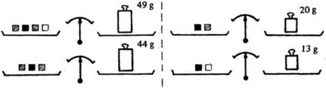


n) He aquí varios problemas gráficos.

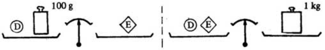
i) Encontrar la masa de B.



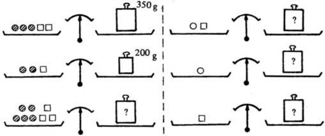
ii) Encontrar la masa de cada uno de estos objetos ▨ ▩ ■ □.



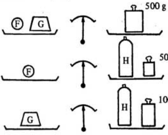
iii) Encontrar las masas de D y E.



iv) Reemplazar cada punto de interrogación por la masa conveniente:



v) Encontrar las masas de F, G y H.



p) Un tonel de 100 kg. de aceitunas de 12 kg. de aceite; 1 litro de aceite de oliva pesa 912 g. ¿Cuántos litros de aceite se obtienen con 7 toneles de aceitunas?

q) Un tonel lleno de agua pesa 277 kg. Si se saca el 60% del agua que contiene, pesa 127 kg. ¿Cuál es el peso del tonel vacío?

r) Entre el instante en que se vio un relámpago y se oyó el trueno pasaron 12 segundos. Sabiendo que la velocidad del sonido en el aire es de 330 m/seg. y que el tiempo de la luz se puede considerar despreciable, ¿a qué distancia del observador se produjo el relámpago?

s) Mi reloj eléctrico adelanta 3 minutos cada 4 días.

i) ¿Cuánto adelanta en 28 días?

ii) Vuelto a poner en hora, después de un tiempo, observo que adelantó 7 minutos 30 seg. ¿Cuánto tiempo pasó?

iii)Si parto de vacaciones el 1 de julio a mediodía (puesto el reloj a la hora oficial) y pienso volver el 15 de agosto a mediodía (hora oficial), ¿qué hora marcará mi reloj?

t) Un reloj de pared adelanta 5 minutos por día, mientras que un reloj pulsera atrasa 3 minutos en el mismo tiempo. En un instante dado, los dos indican la misma hora. ¿Al cabo de cuánto tiempo el de pared estará 1 h. adelantado con respecto al otro? ¿Al cabo de cuánto tiempo los 2 señalarán la misma hora?

Bibliografía

E. GALION, "Galeón I", Teide, Barcelona, 1972.
"Galeon II", Teide, Barcelona, 1972.
"Mathématique 5e", O.C.D.L., Hatier, 1978, Paris.

L. DOUVERT; R. GAUTHIER; M. GLAYMANN, "Travaux pratiques de Mathématique".
- Serie I: Ensembles, O.C.D.L., 1970, Paris.
Serie II: Relations, O.C.D.L., 1970, Paris.
Serie III: Les lois de composition, O.C.D.L., 1970, Paris.
Serie IV: Les structures I. Groupe, O.C.D.L., 1970, Paris.

E. GARRON, "Math-equipe" Fascicule 1, 2, 3, Hatier, 1970, Paris.
"Math-equipe" Fasc.: 4, 5, 6, 7, 8, Hatier, 1971, Paris.
"Math-equipe" Journal nº 9, 10, 11 y 12, Hatier, 1972, Paris.
"Math-equipe" Cours Moyen 2e année, Hatier, 1974, Paris.

Z.P. DIENES, "La mathématique vivante".
- Nombres: Naturels, entiers, rationnels, O.C.D.L., 1972.
- Relations et fonctions, O.C.D.L., 1972, Paris.
- Les ensembles et leur logique, O.C.D.L., 1974, Paris.

DIENES-TELLIER, "Mathématique vivante".
- Trousse 1, Guide des fiches des unités 1, 2 et 3, Editions Hurtubise, 1974, Montreal.
- Trousse 2, Guide des fiches des unités 4, 5 et 6, Editions Hurtubise, 1975, Montreal.
- Trouse 3, Guide des fiches des unités 7, 8 et 9, Editions Hurtubise, 1976, Montreal.

Z.P. DIENES, "Fracciones" Teide, 1972, Barcelona.
"Las seis etapas del aprendizaje en matemática", Teide, 1971, Barcelona.

DIENNES-GOLDING, "Los primeros pasos en matemática".
- Lógica y Juegos lógicos, Teide, 1971, Barcelona.
- Conjuntos, números y potencias, Teide 1969, Barcelona.
- Exploración del espacio y práctica de la medida, Teide, 1969, Barcelona.

Z.P. DIENES, "Estados y Operadores".
- Operadores aditivos, Teide, 1971, Barcelona.
- Iniciación al álgebra, Teide, 1971, Barcelona.
- Operadores multiplicativos, Teide, 1972, Barcelona.

DIENES-GOLDING, "La geometría a través de las transformaciones".
- Topología, geometría proyectiva y afín, Teide, 1969, Barcelona.
- Geometría euclidiana, Teide, 1969, Barcelona.
- Grupos y coordenadas, Teide, 1970, Barcelona.

Z.P. DIENES, "Initiation a la geométrie", O.C.D.L., 1971, Paris.
"Relazioni e insiemi", O.S., 1973, Firenze.
"Dienes logic set", O.S., 1972, Firenze.

DIENES-HERAUD, "Logique élémentaire", Series: I, II, III, IV, V, VI, VII et VIII, Université de Sherbrooke, 1972.

N. PICARD, "Diario Matemático", Tomo I, 1972, Tomos II y III, 1973, Teide, Barcelona.

E. GEMA, "Raisonner et calcurer".
- Math CE 1, O.C.D.L., 1975, Paris.
- Math CE 2, O.C.D.L., 1976, Paris.
- Math CM 1, O.C.D.L., 1977, Paris.
- Math CM 2, O.C.D.L., 1978, Paris.

REMI ZIGLON, "En busca de las estructuras", Teide, 1975, Barcelona.
"Las estructuras", Teide, 1976, Barcelona.

S. BRAY, "Les jeux de Dominique et de Patrick", O.C.D.L., 1970, Paris.
"Les jeux de Sabine et de Thomas", O.C.D.L., 1970, Paris.

A. MYX, "Six thémes pour six semaines", CEDIC, 1974, Paris.

F. JARENTE, "Operateurs à l'école élementaire", CEDIC, 1974, Paris.

R. PONS, "Matemática", 4º, 5º y 6º EGD, Teide, 1973, Barcelona.
"Matemática", 7º y 8º EGB, Teide, 1974, Barcelona.

M. DESCHAMPS, "Matemática", 1º y 2º EGB, Teide, 1973, Barcelona.

DESCHAMPS-PONS, "Matemática", 3º EGB, Teide, 1973, Barcelona.

R. EICHOLZ, "Matemática para la educación primaria", Fondo Educativo Interamericano, 1968, Calí, Colombia.

PALACIOS-GIORDANO, "Las representaciones gráficas en la actividad matemática", GRAM, 1976, Buenos Aires.

A.M.P. de BRESSAN, "Sistemas y bases de numeración. Algunas propiedades numéricas en distintas bases", Cuadernos Universitarios, Universidad Nacional del Camahue, nº 6, 1976.

GRAYMANN-ROSENBLOOM, "La lógica en la escuela", Teide, 1973, Barcelona.

T.B. de NUDLER, "Lógica dinámica", Kapelusz, 1969, Buenos Aires.

NUDLER-NUDLER, "Elementos de lógica simbólica", Kapelusz, 1973, Buenos Aires.

L. CARROLL, "El juego de la lógica", Alianza Editorial, 1972, Madrid.

J. BOSCH, "Introducción al simbolismo lógico", Eudeba, 1965, Buenos Aires.

I. COPI, "Introducción a la lógica", Eudeba, 1962, Buenos Aires.

J. PETROCELLI, "Matemática básica; lógica, conjuntos, relaciones y funciones". Marymar, 1976, Buenos Aires.

G. PAPY, "Matemática moderna", Tomos I, II, III y V, Eudeba, 1970, Buenos Aires.

L.A. SANTALO, "Geometrías no euclidianas", Eudeba, 1961, Buenos Aires.

TREJO-BOSCH, "Ciclo Medio de matemática moderna", 1º y 2º Cursos, Eudeba, 1966, Buenos Aires.

C. TREJO, "Matemática elemental moderna", Eudeba, 1977, Buenos Aires.

La bibliografía anteriormente citada se utilizó no solamente como fuente de consulta, sino que de allí fueron extraídos algunos de los ejercicios presentados en esta obra.

Este libro se terminó de imprimir
en el mes de septiembre de 1987
en los Talleres Gráficos LITODAR
Viel 1444 - Capital Federal